APR 27 1925

Physikalische Zeitschrift

begründet von **E. Riecke** und **H. Th. Simon**

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von **Johannes Stark**

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.20 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Goldmark 9.20, im Ausland $ 2.60. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.30, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

No. 6. Ausgegeben am 2. April 1925. No. 682. Printed in Germany. 26. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

F. Bernhardt, Sättigungsdrucke von *Hg* bis 2000 kg/cm².

J. Kudar, Zur Behandlung des Schwarzschildschen Einkörperproblems im Rahmen der Hamilton-Jacobischen Theorie.

T. Retschinsky, Gold in der Quecksilberlampe.

F. v. Hauer, Entropie und Zustandswahrscheinlichkeit idealer Gase.

Zusammenfassende Berichte:

R. Seeliger, Die Abkühlung heißer Körper in Gasen und Flüssigkeiten.

Besprechungen:

C. G. S. Sandberg, Isostasie und die ursächliche Einheit von Gebirgsbildung und Vulkanismus.

A. Berliner, Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung.

Wo. Ostwald, Licht und Farbe in Kolloiden.

Personalien.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Spindler & Hoyer G. m. b. H.

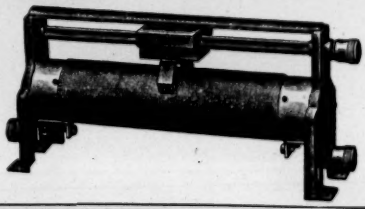
Mechanische und optische Werkstätten

Göttingen 3.

Apparate für luftelektrische
und radioaktive Messungen
Erdbebenregistrierapparate
Normalbatterien
Kondensatoren
Mikrowage
Quarzfadenelektroskop
nach Wiechert
(siehe Abbildung).

PHYWE

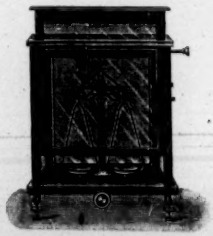
-Gleitwiderstände



Absolut zuverlässig
Denkbar einfach — Unerreicht billig
Verlangen Sie Liste PZW.

Physikalische Werkstätten A.-G.
Göttingen

Wagen und Gewichte



mit höchster Empfindlichkeit in hochfeiner Ausstattung

Analysenwagen **Apothekerwagen**
Mikrowagen **Präzisionswagen**

Kaufen Sie keine Wage ohne die Sartorius-Reitersicherung
Geschützt durch D. R. P. 402191

Katalog „Präzis 9" kostenfrei

SARTORIUS-WERKE A.-G., GÖTTINGEN
Gegr. 1870 Telefon Nr. 129 Telegr.-Adr.: Sartoriuswerke

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 6. 15. März 1925. Redaktionsschluß für No. 8 am 5. April 1925. 26. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

F. Bernhardt, Sättigungsdrucke von *Hg* bis 2000 kg/cm². S. 265.

J. Kudar, Zur Behandlung des Schwarzschildschen Einkörperproblems im Rahmen der Hamilton-Jacobischen Theorie. S. 276.

T. Retschinsky, Gold in der Quecksilberlampe. S. 280.

F. v. Hauer, Entropie und Zustandswahrscheinlichkeit idealer Gase. S. 281.

Zusammenfassende Berichte:

R. Seeliger, Die Abkühlung heißer Körper in Gasen und Flüssigkeiten. S. 282.

Besprechungen:

C. G. S. Sandberg, Isostasie und die ursächliche Einheit von Gebirgsbildung und Vulkanismus. S. 295.

A. Berliner, Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung. S. 296.

Wo. Ostwald, Licht und Farbe in Kolloiden. S. 296.

Personalien. S. 296.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Sättigungsdrucke von *Hg* bis 2000 kg/cm².

[Leipziger Dissertation (gekürzt).]

Von Fritz Bernhardt.

I.

Die höchsten Dampfdrucke von Quecksilber, die bisher gemessen worden sind, entstammen den Versuchen von Cailletet, Colardeau und Rivière[1] aus den Jahren 1897—1900. Diese Forscher konnten Dampfdrucke bis 162 Atm. bei einer Temperatur von 880° C messen. In der vorliegenden Arbeit sind nun diese Messungen wiederholt und der Meßbereich erweitert worden. Ferner sind die Resultate in Verbindung gebracht worden mit den Messungen von Julie Bender[2], welche Dichtebestimmungen von flüssigem und dampfförmigem Quecksilber bis 1400° ausführte.

Es wurden drei verschiedene Versuchsanordnungen benutzt. Bei der ersten Anordnung wurde das *Hg* in Glaskapillaren unter einseitigem innerem Druck sichtbar zum Sieden gebracht. Bei der zweiten Anordnung benutzte ich eine Stahlbombe für hohe Drucke und hohe Temperaturen, wie sie von Des Coudres[3] angegeben worden ist. Hierbei war gestattet, durch Quarzfenster, die an die Bombe angebracht wurden, den Siedevorgang im Innern der Bombe zu beobachten. Schließlich als dritte Anordnung wurde dieselbe Bombe ohne Fenster benutzt, um darin das Quecksilber bei möglichst hohen Drucken zum Sieden zu bringen.

1) Cailletet, Colardeau und Rivière, C. R. 130, S. 1585, 1900.

2) Julie Bender, „Über die kritische Temperatur des Quecksilbers". Phys. Zeitschr. 16. 246, 1915

3) Des Coudres, „Bombe für hohe Drucke und Temperaturen". Berichte der math.-phys. Klasse der kl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig, Bd. LXII.

II.

Es wurde zunächst folgende Anordnung getroffen. (Der Einfachheit halber sind die Stromzuführungen mit in den Aufriß gezeichnet!) Von einer mit Paraffinöl beschickten

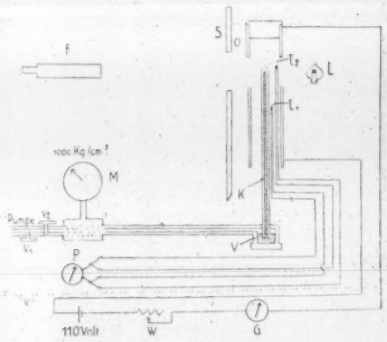


Fig. 1.

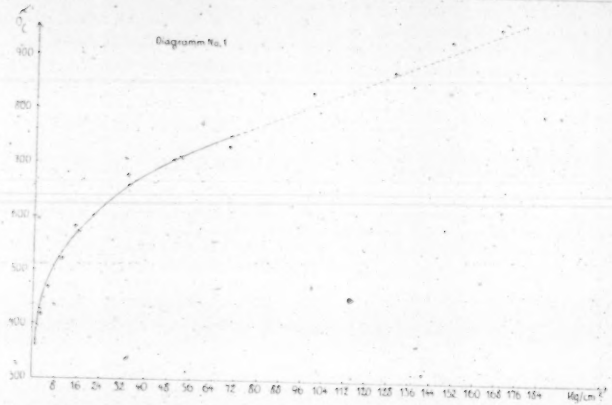
Handpumpe, mit der man Drucke bis 900 kg/cm² erzeugen kann, führt über ein Ablaßventil v_1 und ein Absperrventil v_2 eine Druckleitung zum Federmanometer M von Schäffer & Budenberg, welches einen Meßbereich bis 1000 kg/cm² hat. Bei manchen Messungen wurde ein Manometer bis 100 kg/cm² benutzt. Dieses Manometer steht durch ein Mannesmannrohr von 3 mm äußerem Lumen und 2,5 mm innerem Lumen und einer Länge von 4 m in Verbindung mit einem Verschlußstück V, welches die

Versuchskapillare K trägt. Über die vertikal aufgestellte Kapillare ist konzentrisch der Ofen O gestülpt, und zwar in der Weise, daß man mittelst Fernrohres F durch die Fenster des Ofens die Kuppe der Glaskapillaren anvisieren kann. Dieser Widerstandsofen bestand aus 3 mm dickem Nickeldraht, welcher isoliert auf einen Eisenzylinder gewickelt wurde. Diametral gegenüber wurden zwei Fenster eingeschnitten, die mit doppeltem Glimmer verschlossen waren. Da die Glaskapillaren immer bis zur Grenze ihrer Festigkeit ausgenutzt wurden, wurde jeder Versuch mit einer starken Explosion beschlossen, die anfänglich den ganzen Ofen zertrümmerte. Um dies zu verhindern, bekamen die Fenster Eisenrahmen, die sich sehr gut bewährten. Hinter dem einen Fenster wurde zur Beleuchtung eine elektrische Lampe L aufgestellt. Ferner wurden 2 Thermoelemente τ_1 und τ_2, deren Lötstellen an dem oberen und unteren Rand der Fenster verteilt wurden, isoliert von unten in den Ofen eingeführt. Die Thermoelemente standen in Verbindung mit dem Pyrometer P. Zum besonderen Schutze gegen die Explosionen war zwischen Fernrohr und Ofen in der Nähe des Ofens ein 5 mm dicker Eisenschirm S mit Fenster aufgestellt. Der Ofen mit den Versuchskapillaren befand sich in einer Ecke des Zimmers, und in 4 m Entfernung wurde durch das Fernrohr beobachtet und der Druck und die Temperatur geregelt.

Um die Sättigungsdrucke zu messen, wurde bei konstanter Temperatur so lange mit dem Druck heruntergegangen, bis die Sättigungskurve überschritten wurde und also das Sieden eintrat. Durch Drucksteigerung wurde der Meniskus wieder zum Verschwinden gebracht. Dies ist im einzelnen folgendermaßen durchgeführt. Zunächst berechnete man für eine vorgegebene Temperatur einen Druck, der beträchtlich größer war als der nach Cailletet beobachtete, zugehörige Sättigungsdruck. Dieser Druck wurde zunächst hergestellt, dann das Ventil v_1 geöffnet, bis der Druck ziemlich nahe am Sättigungsdruck war, und die beiden Ventile v_1 und v_2 geschlossen. Nun wurde mit Heizen begonnen, und zwar 10—15 Minuten lang mit einer Stromstärke von 10—15 Amp. War nun Temperaturgleichgewicht eingetreten, so wurde Ventil v_2 geöffnet, und der Druck fiel bis auf den Sättigungsdruck. Im selben Moment bildete sich an dem oberen Ende der Kapillaren der Meniskus aus. War dieser genügend ausgebildet und Temperatur und Druck abgelesen, so konnte die Dampfphase durch Nachdrücken wieder zum Verschwinden gebracht werden. Befand sich anfänglich in dem Druckraum zwischen Pumpe und Ventil v_2 ein zu niedriger Druck, so sank beim Öffnen von v_2 der Druck zu schnell und die Dampfbildung setzte zu energisch ein, so daß dann nicht schnell genug nachgedrückt werden konnte und dabei das Glas zersprang. Durch mehrfaches Ausprobieren ist es gelungen, das Einsetzen des Siedens zu verlangsamen, so daß die Meniskusbildung durch wiederholtes Drucknachlassen und Druckansteigen für eine bestimmte Temperatur mehrfach wiederholt werden konnte. Hierbei konnte nicht immer derselbe Druck als Sättigungsdruck beobachtet werden; sobald man mehr Dampf entwickeln ließ, also das Volumen des Dampfes vergrößerte, wurde der Druck kleiner. Der Sättigungsdruck ist aber vom Volumen unabhängig, und kann diese Erscheinung nur durch die Anwesenheit von Luft in der Dampfzone erklärt werden, die den Druck vergrößert, und zwar um so mehr, je weniger Dampf entwickelt worden ist, also je kleiner das Volumen ist. Diese Erscheinung ist dann auch als Korrektur in Rechnung gezogen worden. Um die verschiedenen Volumina ablesen zu können, wurden horizontale dünne Drähte hinter der Kapillare aufgestellt. Es sei noch bemerkt, daß durch die entsprechende Beleuchtung der Meniskus sehr gut zu sehen war. Der Dampf war vollkommen durchsichtig.

Bei der Aufstellung der Resultate sind zwei Arten von Korrekturen anzubringen. Zunächst mußte die Lötstellentemperatur der Thermoelemente berücksichtigt werden. Die Lötstellen waren bei den Messungen in einiger Entfernung vom Ofen von Watte umgeben. Man kann für die durchschnittliche Temperatur 20° annehmen. Als zweite Korrektur kam für den Druck die störende Wirkung der in den Kapillaren befindlichen Luft in Frage. Der Druck, der gemessen wurde, war nicht der eigentliche Druck des gesättigten Quecksilberdampfes; sondern der gemessene Druck war die Summe aus dem Sättigungsdruck und dem Partialdruck der eingeschlossenen Luft. Dieser Partialdruck der Luft änderte sich nun mit dem Volumen und hatte somit einen verschieden großen Einfluß auf das Meßresultat. Beobachtete man aber bei konstanter Temperatur und bei verschiedenen Volumina des Dampfes, so konnte der Partialdruck der Luft folgendermaßen eliminiert werden. Es seien z. B. p_1, p_2, p_5 die beobachteten Drucke bei den Dampfvolumina v, $2v$, $5v$. Es sei ferner p_s der zur vorgegebenen Temperatur gehörige, zu bestimmende Sättigungsdruck und p_{l_1}, p_{l_2}, p_{l_5} die Partialdrucke der eingeschlossenen Luft, so ist immer $p_i = p_s + p_{l_i}$. Nach der Zustandsgleichung ist der Partialdruck der Luft

$$p_{l_1} = \frac{RT}{v}\varrho \text{ und analog } p_{l_2} = \frac{RT}{2v}\frac{\varrho}{2} \text{ usw.}$$



Es ergibt sich also einfach das Gleichungssystem:

$$p_1 = p_x + \frac{RT}{v} = p_x + \varrho,$$

$$p_2 = p_x + \frac{RT}{2v} = p_x + \frac{\varrho}{2},$$

$$p_5 = p_x + \frac{RT}{5v} = p_x + \frac{\varrho}{5}.$$

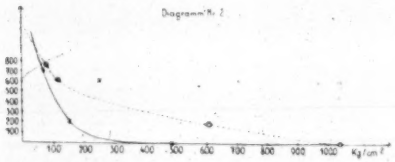
Aus je zwei solcher Gleichungen kann ϱ eliminiert und p_x bestimmt werden. Es entstanden dann je nach der Anzahl der Gleichungen mehrere Werte für p_x; als Resultat ist der Mittelwert davon genommen worden. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die gewonnenen Resultate.

In der vorletzten Spalte stehen die Drucke, wie sie Cailletet, Colardeau und Rivière bei den entsprechenden Temperaturen beobachtet haben. Man sieht, daß bis 550° die Differenzen ca. 1 kg/cm² bleiben, und erst von 560° bis 710° steigen die Differenzen bis zu + 5 kg/cm². Dies läßt sich zum Teil dadurch erklären, daß bei allen Versuchen unter 550° ein Manometer benutzt wurde, welches bis 100 kg/cm² reichte und eine Einteilung von 1 Teilstrich = 1 kg/cm² besaß. Man sieht, daß die Abweichungen in dieser Grenze liegen und wohl auch Schätzungsfehler sein können. Bei Messungen oberhalb 550° ist ein Manometer bis 1000 kg/cm² verwendet worden, welches nur auf 10 kg/cm² genau abzulesen gestattete. Auch hier sind die Abweichungen kleiner als 10 kg/cm² und können ebenfalls Schätzungsfehler sein. Aus diesen Resultaten folgt also bis 70 kg/cm² eine Übereinstimmung mit Cailletet, Colardeau und Rivière. Welche Korrekturen der Temperatur und des Druckes diese Forscher angebracht haben und welches insbesondere der Einfluß von Luft bei ihrer Anordnung gewesen ist, ist nicht bekannt. Im Diagramm Nr. 1 stellen die Punkte die ausgeglichenen Werte von Cailletet, Colardeau und Rivière dar, während die obigen Werte durch Kreuze markiert sind.

Tabelle für Resultate bis 70 kg/cm².

beob. Temp.	beob. Druck	Volumina	Löstel.-Temp.	korrig. Temp.	korrig. Druck	Heizstrom	Cailletet-Wert	Differenzen Cailletet	*
400	4,8	—	20	420					
400	4,0	—	20	420	3,5	9	2,8	— 0,7	
400	3,5	5	20	420					
400	4	2	20	420					
400	3,8	3	20	420	3,2	9	2,8	— 0,4	
400	5	1	20	420					
450	6,0	1	20	470					
450	0,5	2	20	470	5,8	9	5,2	— 0,6	
450	6	5	20	470					
450	7	1	20	470					
450	6,5	2	20	470					Manometer bis 100 kg/cm²
450	7,8	1	20	470					
450	7	1	20	470	5,3	9	5,2	— 0,1	
450	6	2	20	470					
450	7	1	20	470					
500	12,5	2	20	520					
500	11,5	3	20	520	10	—	9,9	— 0,1	
500	12	2	20	520					
500	12	1	20	520					
500	11,5	2	20	520	11	—	9,9	— 1,1	
500	12	1	20	520					
550	19,5	1	20	570					
550	18	2	20	570	16,5	—	16,5	0,0	
550	19,5	1	20	570					
500	15	—	20	580	15	12,5	18	+ 3,0	Manometer bis 1000 kg/cm²
650	34	—	20	670	34	12,5	39	+ 5,0	
710	70	—	20	730	70	13	65	— 5,0	

Warum mit dieser Anordnung und Methode nicht noch höhere Drucke als 70 kg/cm² gemessen werden konnten, liegt in der Festigkeit der Glaskapillaren begründet. Hierzu sei noch folgendes erwähnt. Es wurde zunächst die Festigkeitsgrenze von Glaskapillaren aus sogenanntem „Jenaer Verbrennungsglas" von 7 mm äußerem und 2 mm innerem Lumen festgestellt, die aber für höhere Drucke und gleichzeitig höhere Temperaturen relativ tief lag, z. B. 150 kg/cm² bei 200°. Es wurden deshalb Festigkeitsversuche mit Glaskapillaren aus gewöhnlichem Glas durchgeführt und brachten günstigere Resultate, wie das Diagramm Nr. 2



zeigt. Die ausgezogene Kurve stellt die Festigkeitsgrenze für Hartglas und die gestrichelte Kurve die Festigkeitsgrenze für gewöhnliches Glas dar; und zwar wurden die Kapillaren mit Paraffinöl und bei höheren Temperaturen mit Quecksilber gefüllt und dem gesuchten Grenzinnendruck ausgesetzt. Aus dem Diagramm kann man ersehen, daß sich bei gleichzeitiger Temperatur- und Druckbeanspruchung das gewöhnliche Glas besser bewährt als das sogenannte Hartglas. Ferner sieht man, daß sich unterhalb 100 kg/cm² die beiden Kurven kreuzen, so daß man sagen kann: Für kleine Druckbeanspruchung hält das Hartglas höhere Temperaturen aus als das gewöhnliche Glas; beansprucht man aber die Gläser auf höhere Drucke, bis 1000 kg/cm², so hält das gewöhnliche Glas relativ zum Hartglas höhere Temperaturen aus. Die punktierte Linie stellt einen Teil der Sättigungsdruckkurve nach Cailletet, Colardeau und Rivière dar, und man ersieht daraus, daß höchstens Sättigungsdrucke von 70—80 kg/cm² mit diesen Gläsern und mit dieser Methode gemessen werden können. Es sind verschiedene Dimensionen dieser Kapillaren ausprobiert worden, was zu dem Ergebnis führte, daß Kapillaren mit 7,5 mm äußerem und 3,5 mm innerem Lumen die haltbarsten sind. Diese Festigkeitsversuche bestätigen nebenbei bemerkt ebenfalls die von Bridgman[1]) erwähnte Tatsache, daß die Innendruckfestigkeit sehr wohl größer als die Zugfestigkeit sein kann, entgegen allen bisherigen elastizitäts-theoretischen Formeln; denn auch bei diesen Untersuchungen sind Innendrucke von 1025 kg/cm² gemessen worden, während die Zugfestigkeit von Glas nach den Tabellen von Landolt-Börnstein zwischen 300 und 900 kg/cm² liegt.

1) Bridgman, Phil. Mag. (6) 24, 1912. „Breaking Tests under hydrostatic pressure and conditions of Rupture".

III.

Da, wie soeben erwähnt, die Versuche mit einseitigem Druck über 70 kg/cm² aussichtslos sind, sind diese mit Quecksilber gefüllten Versuchskapillaren in eine Bombe unter allseitigem Druck gebracht worden. Das Sieden konnte durch Quarzfenster mit einem Fernrohr beobachtet werden. Auf diese Weise konnten die Cailletetschen Werte noch bis über 880° durch sichtbares Sieden kontrolliert werden.

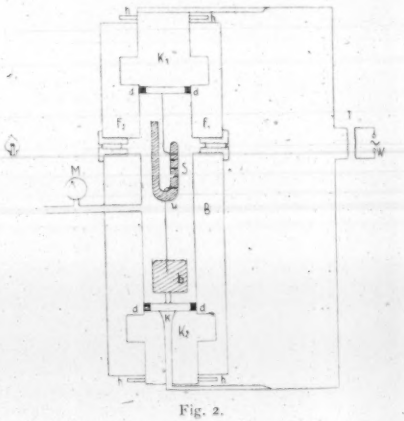


Fig. 2.

Im zylindrischen Versuchsraum der Stahlbombe B befindet sich das aus Quarzglas hergestellte U-Rohr u, welches mit Quecksilber gefüllt ist, und dessen kürzerer Schenkel oben geschlossen ist. Zur Heizung dient ein Platinwiderstandsofen S, welcher um das geschlossene Ende des U-Rohres gewunden ist, und mit dem oberen Verschlußkopf K_1 in Verbindung steht. Unten taucht die Spirale in einen mit Quecksilber gefüllten Eisenbecher b, welcher mit dem Konus k in Verbindung steht. Dieser Konus k ist isoliert durch den Verschlußkopf K_2 geführt. Als Isolationsmaterial dient Elfenbein. Von diesem Konusstück k und von dem oberen Verschlußkopf K_1 führen dicke Kupferbänder zu einem Transformator T, welcher den vom Wechselstromgenerator w erzeugten Wechselstrom in Wechselstrom von hoher Stromstärke

transformiert. Diametral gegenüber sind in der Höhe der U-Rohrkuppe zwei Fenster F_1 und F_2 aus Bergkristall eingeschraubt. Das Innere der Bombe steht in Verbindung mit einem Manometer M bis 1000 kg/cm² und der oben erwähnten Handpumpe. Hinter dem einen Fenster stand noch eine Lampe zur Beleuchtung. Die Verschlußköpfe haben die Form von starken Bajonettverschlüssen und können durch Dichtungsringe d aus Leder und Vulkanfiber den mit destilliertem Wasser als Druckflüssigkeit beschickten Versuchsraum drucksicher abschließen. Das zur Verwendung kommende U-Rohr hat 8 mm äußeren und 3 mm inneren Durchmesser. Der kurze oben geschlossene Schenkel hat eine Länge von 8,5 cm und der lange offene Schenkel eine Länge von 21 cm. Der Platinwiderstandsofen ist in 6 Windungen eng um das kurze Ende des U-Rohres so gewunden, daß die obere Kuppe des Quarzgefäßes 1 cm frei bleibt. Das U-Rohr hängt mit dem Ofen und dem Thermoelement am oberen Verschlußkopf. Fig. 3 zeigt diese Anordnung.

Das U-Rohr u ist durch die Eisenstange s starr mit dem Bombenkopf K verbunden. Der Ofen S ist an eine Kupferstange b geschweißt, die leitend mit dem Bombenkopf verbunden ist. Über das kurze verschlossene Ende des U-Rohres sind Hauben h aus Quarzglas gestülpt. (In Fig. 3 nur eine Haube gezeichnet.) Diese Hauben haben den Zweck, die Wärme zusammenzuhalten. Man benutzte im ganzen 3 Hauben, die übereinander gestülpt wurden. Die zwei innersten Hauben bestanden aus Quarz und die äußere aus Glas. Sie waren 8 cm lang. Ihr unteres Ende war 2,5 cm von der untersten Spiralenwindung des Ofens entfernt. Sie paßten gut aufeinander und saßen dicht an den Ofen an. Sie ruhten unmittelbar auf der Kuppe des U-Rohres. Die innerste Haube hatte einen inneren Durchmesser von 18 mm, die äußere einen Durchmesser von 30 mm. Über die Wirkungsweise dieser Hauben wird später berichtet. Durch den Verschlußkopf führen 4 isolierte Zuleitungen m_1, m_2, n_1, n_2. Sie sind sämtlich durch Elfenbein isoliert. An zwei Enden dieser Zuleitungen liegt der Widerstand w des Widerstandsthermometers. Letzteres dient dazu, die Temperatur zu messen, die im Innern der Bombe in unmittelbarer Nähe des oberen Verschlußkopfes herrschte. Die anderen zwei Zuleitungen n_1 und n_2 enden in zwei Stangen r_1 und r_2, wovon die eine aus Platin, die andere aus Platinrhodium besteht. An diese zwei Zuleitungen werden die Enden des Thermoelementes so angeschraubt, daß zwei gleiche Metalle miteinander verbunden werden. Dieses Thermoelement ist isoliert durch Quarzkapillaren und seine Lötstelle befindet sich unmittelbar neben der Kuppe des U-Rohres unter der untersten Haube. Die Stangen r_1 und r_2 sind innerhalb des Kopfes K auf Stahlkonen geschraubt, welche durch Elfenbein isoliert sind, und in die von oben die Kupferleitungen n_1 und n_2 eingeschraubt sind. Die Lötstellen (d. h. die freien Enden)

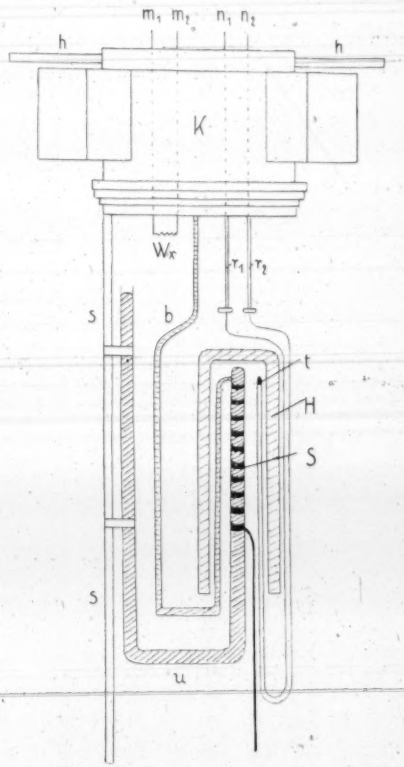


Fig. 3.

dieses Thermoelementes befinden sich also an diesen Stahlkonen im Innern von K. Dieser obere Verschlußkopf enthielt noch eine axiale Bohrung. In diese wurde ein Quecksilberthermometer gesteckt, um die Lötstellentemperatur der Thermoelemente auch auf diese Weise zu bestimmen. Die Heizstromanlage ist im wesentlichen in der Dissertation von W. Frey[1])

1) W. Frey, Die Abhängigkeit des Halleffektes in Metallen von der Temperatur. Ann. d. Phys. **46**, 1057, 1915.

beschrieben worden. Ein Wechselstromgenerator von 11 Kilowatt wird von einem Gleichstrommotor von 14 PS angetrieben. Der hochgespannte Wechselstrom wird in einem Transformator von 9 Kilowatt durch entsprechende Schienenschaltung in Wechselstrom von verschieden hohen Stromstärken transformiert. Die höchste Stromstärke, die erreicht werden kann, ist 2200 Amp.

Die Messungen gestalteten sich nun folgendermaßen: Die Bombe wurde mit destilliertem Wasser beschickt, wobei zu beobachten war, daß keine Luftbläschen an den Fenstern und unter der Haube verblieben, und ferner kein Öl an den Wänden der Bombe haftete. Letzteres verursachte beim späteren Erhitzen eine Trübung des Gesichtsfeldes. War die Bombe in dieser Weise gefüllt und durch den oberen Verschlußkopf mit angehängter Apparatur verschlossen, so konnte, nachdem man festgestellt hatte, daß die Fenster genügend dicht waren, ein gewünschter Druck vorgegeben, und mit Heizen begonnen werden. Da man sich immer unterhalb des kritischen Druckes von Wasser befand, konnte beim Heizen bei konstantem Druck deutlich das Sieden des Wassers beobachtet werden. Der Wasserdampf bildete sich unter der innersten Haube, und der Meniskus des Wassers verschwand aus dem Gesichtsfeld. Der Wasserdampf ist aber immer unter der Haube geblieben; denn die Hauben zeigten dann später einen deutlichen Rand, wo die Grenzfläche Wasser—Wasserdampf gestanden hatte. Die Temperatur war im unteren Teile der Haube so tief, daß wieder Kondensation eingetreten war. Die Hauben hielten die Wärme gut zusammen. Dies war ein Haupterfordernis für diese ganze Anordnung; denn größere Mengen Wasserdampfes von so hohen Temperaturen durften keinesfalls in der Bombe entstehen. Führte man das Sieden des Quecksilbers bei konstantem Druck herbei, so bildete sich langsam der Meniskus und blieb dauernd im Gesichtsfeld. Im unteren Teile des U-Rohrschenkels war also auch die Temperatur tief genug, um Kondensation eintreten zu lassen. Da man Temperaturen über 800° einstellte, war das flüssige Quecksilber so kirschrotglühend, daß es sich gegen den durch die Lampe beleuchteten durchsichtigen Dampfraum wenig abhob. Die Grenzfläche zwischen Dampf und Flüssigkeit konnte man durch feines Brodeln erkennen. Auch wenn man bei konstanter Temperatur durch Druckablassen das Sieden verursachte, war der Meniskus so zu regulieren, daß er im Gesichtsfeld blieb. Dann wurden der Druck und die Temperatur abgelesen. Der Meniskus wurde stets durch Drucksteigerung zum Verschwinden gebracht, was hier nicht so gefährlich als bei den Versuchen mit einseitigen Drucken in Glaskapillaren war. Immer wurde mit Fernrohr beobachtet, da eventuell die Fenster aus der Bombe herausgepreßt werden konnten. Bei 1100° brannte der Platinofen durch. Kurz vorher bei 1000° sollte noch eine Messung ausgeführt werden, die aber durch beginnende Undichtigkeit der Fenster vereitelt wurde.

Bei diesen Messungen kam eine Druckkorrektion nicht in Frage, weil auch bei verschiedenen Volumina des Dampfes der Druck konstant blieb, und also kein fremdes Gas mit dem Dampf gemischt war. Die Lötstellentemperaturkorrektion mußte jedoch angebracht werden. Zur Bestimmung dieser Temperatur dienten die Angaben des Quecksilberthermometers, das in der Bohrung des Bombenkopfes saß, und die Bestimmungen der Temperatur des oberen Bombenwassers durch das Widerstandsthermometer. Die Anordnung war im speziellen folgende (Fig. 4).

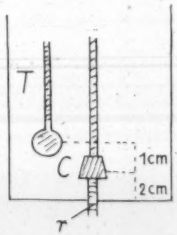


Fig. 4.

Die zwei Stahlkonen C (in Fig. 4 nur einer gezeichnet), die die Lötstellen des Thermoelementes tragen, waren 2 cm von dem unteren Rand des Kopfes entfernt. Die Kugel des Quecksilberthermometers T befand sich 1 cm oberhalb dieser Konen. Nimmt man nun einen linearen Temperaturabfall vom unteren Rand des Kopfes bis zum Thermometer T an, so kann man durch Interpolation aus den Angaben des Quecksilberthermometers und des Widerstandsthermometers, was dicht an dem unteren Rand des Kopfes anlag, die Temperatur der Lötstellen berechnen. In folgender Tabelle sind die Resultate zusammengestellt.

Tabelle für die Resultate bis 170 kg/cm².

P	T'	t	t	π	π/ϱ
100	800	22	51	31	851
130	840	22	65	36	876
152	900	25	65	38	938
170	925	27	65	39	904

Dabei bedeuten P der Sättigungsdruck in kg/cm². T die abgelesene Temperatur. t ist die Temperatur des Quecksilberthermometers. τ ist die Temperatur, die das Widerstandsthermometer anzeigt. π bedeutet die Lötstellentemperatur, interpoliert aus den Werten t und τ. T_k ist die Temperatur, die also wirklich geherrscht hat, die durch Addition der Lötstellentemperatur zur Temperatur T entstanden ist. Es sind also die Wertepaare P und T_k die endgültigen Resultate. Im Diagramm Nr. 1 sind diese Werte ebenfalls durch Kreuze markiert.

Zu diesen Resultaten ist zu sagen, daß infolge meiner Messungen die Kurve etwas steiler verläuft, etwa wie die gestrichelte Linie im Diagramm Nr. 1. Aus den weiteren Messungen über 200 kg/cm² geht ebenfalls hervor, daß die Kurve etwas höher, als Cailletet es angegeben hat, verlaufen muß. Außerdem muß man sagen, daß bei der letzten Messung von Cailletet bei 880° bereits das Quecksilber durch die Bombenwand diffundiert war; ferner sind obige Werte durch wiederholte Meniskusbildung bei sichtbarem Sieden gefunden.

IV.

Schließlich sollen noch die Versuche in einer Bombe ohne Fenster bis 2000 kg/cm² beschrieben werden. Bei diesen Versuchen wurden U-Rohre aus Quarzglas, die mit Quecksilber, durch welches der Heizstrom geschickt wurde, gefüllt waren, verwendet. Fig. 5 A u. B zeigt die genaue Konstruktion dieser U-Rohre. A im Längsschnitt und B im Querschnitt.

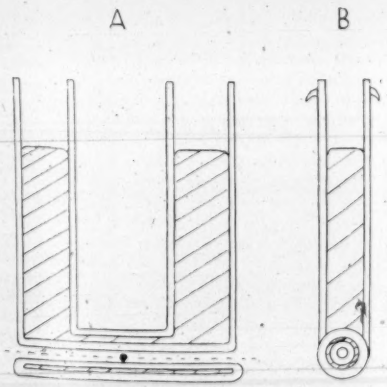


Fig. 5 A u. B.

Durch das Verbindungsstück der beiden U-Rohrschenkel ist konzentrisch eine Kapillare aus Quarz durchgeführt. Diese dient zur Aufnahme des Thermoelementes, dessen Lötstelle in der Mitte drin sitzt. Füllt man das U-Rohr mit Quecksilber, so bildet dieses selbst in dem horizontalen Verbindungsstück einen kleinen Hohlzylinder mit einer Wandstärke von ~ 1 mm. Der Querschnitt dieses Quecksilberzylinders stellt also einen Kreisring dar, der in Fig. 5 B zu sehen ist. Schickt man nun durch dieses Quecksilber einen Strom, so erwärmt sich zuerst dieses röhrenförmige Stück und es beginnt also auch an dieser Stelle zuerst das Sieden.

Die Konstruktion dieser U-Rohre ist in sehr sorgfältiger Weise von der Firma Dr. Siebert & Kühn in Kassel ausgeführt worden. Es kam hierbei besonders darauf an, daß dieser Ringkanal in seiner ganzen Länge eine gleichmäßige Wandstärke von 0,2 mm hatte.

In diesem U-Rohr wurde zunächst das Quecksilber bei Atmosphärendruck zum Sieden gebracht. Es wurde Wechselstrom von dem oben beschriebenen Transformator durch das U-Rohr geschickt. Der Siedevorgang gestaltete sich folgendermaßen. Der Dampf bildete sich so langsam, daß in dem kapillaren Verbindungsstück nur an einigen, nicht immer denselben Stellen das flüssige Quecksilber verdrängt wurde; aber niemals riß die dünne Quecksilberschicht ganz ab. Durch dieses teilweise Verdrängen des flüssigen Quecksilbers vergrößerte sich der Widerstand und damit verkleinerte sich die Stromstärke bzw. die Wärmezufuhr. Es trat wieder Kondensation ein, und der Vorgang konnte von neuem beginnen. Es machte sich dieses periodische Sieden durch entsprechende Spannungs- und Stromstärkeschwankungen bemerkbar. Keinesfalls aber durfte das flüssige Quecksilber ganz abreißen. Es entstand in diesem Falle sofort ein Lichtbogen, der viel höhere Temperaturen erzeugte und damit die Bestimmung der Siedetemperatur unmöglich machte. Ganz analoge Erscheinungen sind von Des Coudres[1]) an Quecksilber- und Salzsäurefaden beobachtet worden. Dieses Abreißen konnte durch entsprechende Konstruktion der U-Rohre verhindert werden. Neben den oben erwähnten Spannungs- und Stromstärkeschwankungen waren weitere Kriterien für den Eintritt des Siedens die Temperaturkonstanz und das metallische Siedegeräusch des Quecksilbers. Bei Funkenbildung war nicht dieses brodelnde Geräusch, sondern ein scharfes Knarren zu hören. Messungen mit diesen U-Rohren ergaben eine Siedetemperatur von 354° bei 740 mm Druck.

1) Des Coudres, Bombe für hohe Drucke usw. Berichte d. mathem.-phys. Klasse d. kgl. sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig, Bd. LXII.

Um möglichst hohe Drucke erzeugen zu können, kam eine hydraulische Presse von 100 Tonnen Leistung zur Benutzung, unter die eine Bombe mit vertikal beweglichem Stempel gebracht wurde, die ihrerseits mit der Versuchsbombe, wie sie im vorigen Abschnitt (Fig. 2) beschrieben ist, verbunden wurde. Durch diese Stempelübertragung konnten die von der Presse erzeugten relativ niedrigen Drucke in hohe Drucke verwandelt werden. Die Presse selbst ist im Kellergeschoß des Institutes auf einer 45 cm dicken Betonschicht montiert. Stahlkapillaren verbinden den Druckraum der Übertragungsbombe mit dem Druckraum der Versuchsbombe, die sich im Laboratorium über dem Kellergeschoß befindet. In diese Versuchsbombe wird ein mit Quecksilber gefülltes Quarz-

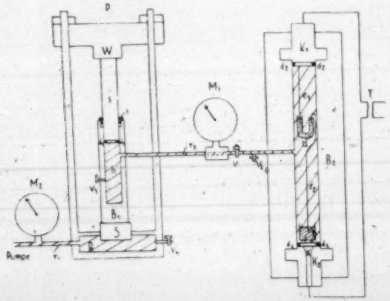


Fig. 6.

glas-U-Rohr von der oben beschriebenen Form gebracht, durch welches mittels geeigneter Elektroden Wechselstrom geschickt wird. Die einzelne Anordnung zeigt Fig. 6. Die hydraulische Presse P besteht aus vier auf Zug beanspruchten Eisensäulen von 7 cm Durchmesser, welche den Druckraum R mit dem Widerlager W verbinden. Der Druckraum der Presse, der den beweglichen Pressestempel S führt, steht durch die Stahlkapillare r_1 und dem Manometer M_2 mit der Handpumpe in Verbindung. Seitlich befindet sich noch ein Ablaßventil v_4. Auf dem Stempel S steht die Druckbombe B_1, die ebenfalls einen variablen Stempel s führt, der gegen das Widerlager w drückt. Die Stahlbombe, die noch ein Ventil v_3 trägt, hat eine Länge von 68 cm und einen äußeren Durchmesser von 20 cm; während der Stempel einen Durchmesser von 6 cm und eine Länge von 40 cm besitzt. Dieser Stempel wurde gehärtet und sorgfältig geschliffen. Er trägt außerdem an der oberen Öffnung der Bombe einen Führungsring r, damit bei Beginn des Drückens der Dichtungsring d_1 gleichmäßig beansprucht wird. Diese Anordnung ist bei einem Vorversuch bis 3000 kg/cm² ausprobiert und als drucksicher festgestellt worden. Durch diese Stempelübertragung konnte man z. B. bei 140 kg/cm² Niederdruck, der im Druckraum R durch die Handpumpe erzeugt wurde, einen Hochdruck von 2150 kg/cm² im Druckraum der Bombe B_1 erzeugen. Dieser Druckraum h steht durch eine 8 m lange Stahlkapillare von 5 mm äußerem und 2,5 mm innerem Lumen mit dem Manometer M_1 in Verbindung, welches einen Meßbereich bis 3000 kg/cm² hat. Von diesem Manometer führte über ein Verschlußventil v_1 und ein Ablaßventil v_2 eine weitere Stahlkapillare zu dem Versuchsraum der Bombe B_2. Diese Bombe B_2 ist dieselbe, die bei den früheren Versuchen mit Fenstern benutzt wurde, nur sind bei diesem Versuch die Fenster durch starke Verschlußschraubungen ersetzt. Zwei Elektroden e_1 und e_2, die ihrerseits mit dem Bombenkopf K_1 und mit dem mit Quecksilber gefüllten Becher b verbunden sind, führen in das mit Quecksilber gefüllte U-Rohr u. Die Heizstromzuführung ist dieselbe, wie bei den Versuchen bis 170 kg/cm². Besondere Sorgfalt mußte bei diesen hohen Drucken auf die Dichtungen d_2 gelegt werden. Sie bestanden aus einem Vulkanfiberring und drei Lederringen. Zunächst dichteten die Lederringe ab, während der Vulkanfiberring den Abschluß bildete. Das U-Rohr mit dem Thermoelement wurde ebenfalls wie bei den früheren Versuchen an den oberen Verschlußkopf der Versuchsbombe B_2 gehängt. Die einzelne Anordnung zeigt Fig. 7.

Der Vulkanfiberring v und die 3 Lederringe $l_1 l_2 l_3$ werden durch den Stahlring s an den Bombenkopf angepreßt. Dieser Stahlring trägt zwei Vulkanfiberbacken v_1 und v_2, die ihrerseits einen Eisenbecher b_1 halten. Dieser Eisenbecher, der noch ein Ansatzstück a trägt, taucht in den in Fig. 6 gezeichneten mit Quecksilber gefüllten Eisenbecher b, der wiederum mit dem isolierten Konus k des unteren Bombenverschlußkopfes K_2 in Verbindung steht. Die Dimensionen des Bechers b sind so gewählt, daß er knapp in den Becher b paßt, und das Ansatzstück a gerade in das Quecksilber taucht. Das U-Rohr u, welches das Thermoelement t in der oben beschriebenen Weise führt, ist mittels dünnen Drahtes, der um die Haken h gelegt ist, in den Ösen O, die an den Vulkanfiberstücken angebracht sind, aufgehängt. Vom Verschlußkopf ragt eine starke Eisenelektrode e_1 in das Quecksilber des einen U-Rohrschenkels; während das rechtwinkelige Eisenstück e_2 eine Verbindung zwischen dem Quecksilber des anderen Schenkels und dem Quecksilber, welches sich am Boden des Bechers b_1 befindet, her-

stellt. Die Enden des Thermoelementes t sind sorgfältig um die Schenkel des U-Rohres geführt und bis zu den Platin, Platinrhodiumstangen r_1 und r_2, die schon oben erwähnt sind, durch Quarzkapillaren geschützt. Die Umbiegestellen des Thermoelementes sind vom Eisenbecher durch ein Glimmerband g isoliert.

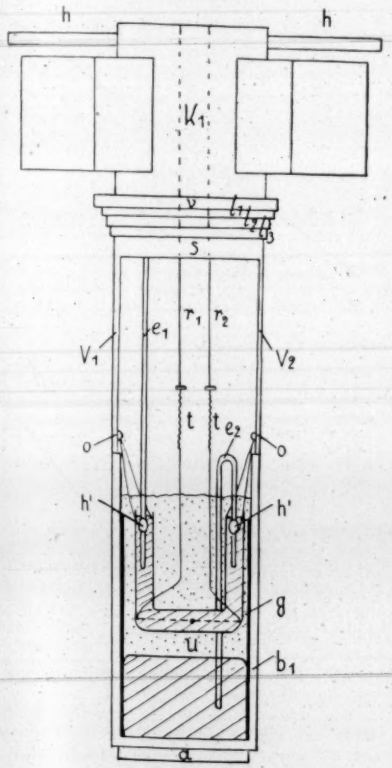


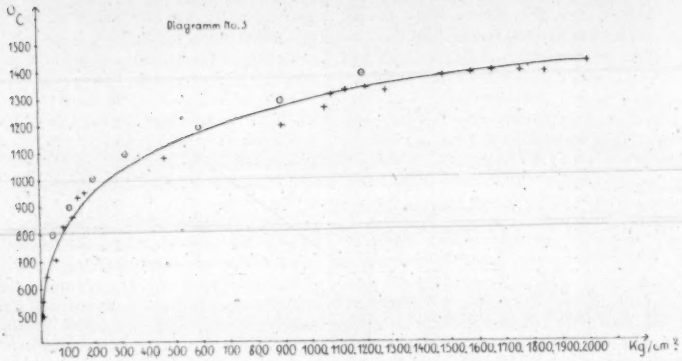
Fig. 7.

Die Vulkanfiberbacken v_1 und v_2 isolieren den Becher b_1 von dem Bombenkopf. Zum Schluß wird noch das U-Rohr in Quarzsand eingebettet, der im Becher b_1 bis an die Ränder der U Rohrschenkel aufgeschüttet wird. Dieser Quarzsand ist sehr wichtig. Er schützt den Quarz vor direkter Berührung mit dem Druckwasser. Dies ist deshalb nötig, weil die im Druckwasser schwimmenden Metallteilchen eine nicht vermeidbare Christobalitbildung des Quarzes begünstigen. Ferner hält der Quarzsand die Wärme gut zusammen.

Bei geschlossenem Ventil v_1 wird die Übertragungsbombe B_1 mit destilliertem Wasser beschickt. Auf das Wasser wird im Bombenraum etwas Öl geschichtet, damit die Dichtung des Stempels nicht direkt mit Wasser in Berührung kommt. Nachdem die Lederdichtungsringe ca. 48 Stunden getrocknet und der Vulkanfiberring kurz vor dem Versuch mit heißem Wasser genügend aufgequollen ist, werden diese Dichtungen mittels des verschraubbaren Stahlringes s (Fig. 7) an den Verschlußkopf der Versuchsbombe angepreßt. Hierauf wurde die in Fig. 7 beschriebene Apparatur an den Verschlußkopf angebracht. Der Verlauf der Messungen gestaltete sich dann folgendermaßen.

War der gewünschte Druck konstant, so konnte mit langsamem Heizen begonnen werden, was durch entsprechende Feldregulierung des Wechselstromgenerators ausgeführt wurde. Der Eintritt des Siedens machte sich durch die schon erwähnte Temperaturkonstanz, das Schwanken der Strom- und Spannungsmesser und durch das spezifische Siedegeräusch bemerkbar. Führte man stärkere Energie zu, so blieb die Temperatur konstant, nur die Schwankungen wurden rascher und das Geräusch heftiger. Hatte man sich überzeugt, daß die drei Kriterien in der gewünschten Weise erfüllt waren, so wurden Temperatur und Druck abgelesen. Bei einigen Messungen wurde in die Nähe des U-Rohres noch ein zweites Vergleichsthermoelement gebracht, um über die Temperatur des Bombenwassers Auskunft zu erhalten. Bei diesen Messungen blieb man immer über dem kritischen Druck des Wassers und das Sieden wurde stets bei konstantem Druck herbeigeführt. Hatte man mehrere Messungen auszuführen, so wurde während der Drucksteigerung die Heizung vorübergehend abgestellt, damit die Quarzrohre nicht so lange den hohen Temperaturen ausgesetzt waren. Bei diesen Versuchen ist bis 2020 kg/cm² beobachtet worden.

Als Korrektion kam bei diesen Messungen nur die Lötstellentemperatur-Korrektion in Frage. Da bei diesen Versuchen neben dem 2. Thermoelement nicht noch ein Widerstandsthermometer durch den Bombenkopf eingeführt werden konnte, mußte die Lötstellentemperatur aus den Angaben des zweiten Thermoelementes und aus den Erfahrungen, die bei den früheren Messungen bis 170 kg/cm² gemacht wurden, bestimmt werden. Es ist auf diese Weise wenigstens die Größenordnung der Lötstellentemperaturen festzustellen. Betrachtet man die Lötstellentemperaturen bei den früheren Versuchen mit der Fensterbombe, so hatte man



bei einer gemessenen Innentemperatur von 800° eine Lötstellentemperatur von 30° und bei 900° hatte man rund 40° Lötstellentemperatur. Extrapoliert man diese Zuordnung, so erhält man z. B. bei

1200° Innentemp. 70° Lötstellentemperatur

und bei

1300° Innentemp. 80° Lötstellentemperatur.

Daß diese Zuordnung der Größenordnung nach stimmt, beweist eine Angabe des zweiten Thermoelementes bei einer Innentemperatur von 1250—1300°. Dieses Thermoelement befand sich bei dieser Messung im Sand des Eisenbechers und zeigt 110° an. Nehmen wir diese Temperatur als Sandtemperatur an, so wird das Bombenwasser über dem Sand ca. 100° gewesen sein, und da ferner dieses Wasser dauernd zirkuliert, wird auch das obere Bombenwasser 100° angenommen haben. Nun ist, wie ebenfalls aus den Versuchen mit der Fensterbombe hervorgeht, die Lötstellentemperatur durchschnittlich 20° tiefer als die Bombenwassertemperatur, so daß man also mindestens 80° für die Lötstellentemperatur bei einer Innentemperatur von 1250—1300° erhielt, was mit den extrapolierten Werten übereinstimmt. Da ferner zurzeit eine weitere Herstellung von diesen teuren Quarglas-U-Rohren aus technischen Gründen nicht möglich ist, hat man sich auf die obige Schätzung beschränken müssen, die aber die Größenordnung dieser Korrektur mit einer für das Endergebnis hinreichenden Genauigkeit wiedergibt. Die folgende Tabelle zeigt neben den Sättigungsdrucken und den zugehörigen korrigierten Temperaturen noch in einigen Fällen die zur Heizung nötige Spannung und Stromstärke.

Hierzu ist noch zu bemerken, daß die Messung bei 470 kg/cm² unmittelbar nach der Messung bei 1075 kg/cm² erfolgt ist, so daß also in diesem Falle dieselbe Lötstellentemperatur wie bei 1260° Innentemperatur anzunehmen ist. Im Diagramm Nr. 3 sind diese Resultate im Zusammenhang mit den übrigen Resultaten durch Kreuze markiert. (Die Kreise im Diagramm werden später erklärt.) Es ist zweimal versucht worden, mit diesen U-Rohren Messungen bei 2100 kg/cm² auszuführen, jedoch konnte nur in dem einen Falle der Eintritt des Siedens durch die bekannten Spannungs- und Stromstärkeschwankungen und durch das Siedegeräusch festgestellt werden. Eine Temperaturmessung war leider nicht möglich. Es soll bei diesen Versuchen nicht unerwähnt bleiben, daß sich die Manometer von Schäffer & Budenberg ausgezeichnet bewährt haben. Das Manometer bis 3000 kg/cm² Meßbereich ist nach den Versuchen von obiger Firma nochmals geprüft und als fehlerfrei festgestellt worden.

Tabelle für Resultate bis 2020 kg/cm².

Druck	Temperatur gemessen	Lötstellen-temperatur	Temperatur korrigiert	Volt	Amp.
470	1020	75	1095	4	—
900	1150	65	1215	4,5	—
1060	1210	71	1281	5	—
1075	1260	76	1336	—	—
1140	1265	77	1342	4	—
1210	1270	77	1347	4,9	—
1280	1270	77	1347	5,5	—
1490	1310	81	1391	6	—
1590	1320	82	1402	—	200
1676	1330	83	1413	6,5	—
1770	1330	83	1413	7	—
1850	1330	83	1413	—	—
2020	1350	85	1435	—	—

V.

Auf Grund obiger Messungen ist es möglich, die im Diagramm Nr. 3 dargestellte aus

geglichene Kurve zu zeichnen. Es ergeben sich daraus folgende Sättigungsdrucke.

Tabelle der Resultate.

Temperatur	Druck	Cailletet
400	2	2,5
450	4	4,25
500	7	8
550	12	13,8
600	22	22,3
650	34	34
700	46	50
750	63	72
800	86	102
850	115	137,5
900	145	
950	195	
1000	260	
1050	330	
1100	425	
1150	535	
1200	665	
1250	825	
1300	1025	
1350	1265	
1400	1600	
1455	2020	

Die dritte Spalte enthält die abgerundeten Sättigungsdrucke nach Cailletet, Colardeau und Rivière.

Die vorliegenden Beobachtungen sprechen dafür, daß die Kurve etwas steiler verläuft als die Cailletetsche Kurve. Welche Korrekturen und welche Meßgenauigkeit bei der Cailletetschen Anordnung vorhanden war, ist leider nicht bekannt, indes läßt sich deshalb ein exakter Vergleich nicht anstellen. Berücksichtigt man aber, daß die in dieser Arbeit besprochene Anordnung für ein viel größeres Druckbereich eingerichtet ist und Druckschwankungen von 10 kg/cm² ein halbes Prozent des gesamten Meßbereiches ausmachen, so kann man trotz obiger Abweichungen die Cailletetschen Werte als bestätigt ansehen und zwar dadurch, daß durch sichtbares Sieden dieselben Resultate erhalten wurden.

Die Hertzsche Formel für die Sättigungsdruckkurve

$$\ln p = k_1 - k_2 \ln T - \frac{k_3}{T}$$

ergibt mit den von A. Smith und A. W. C. Menzies[1]) (aus Beobachtungen zwischen 250° und 435°) berechneten Konstanten eine gute Übereinstimmung bis 1000° C und noch eine leidliche Übereinstimmung mit der Beobachtung bis 1100° C. Das gleiche gilt für die von Knudsen[2]) berechneten Konstanten der Hertzschen Formel.

1) A. Smith u. A. W. C. Menzies, Ann. d. Phys. **33**, 981, 1910.
2) M. Knudsen, Ann. d. Phys. **29**, 184, 1909.

Betreffs der kritischen Größen von Quecksilber kann folgendes gesagt werden.

Die schon von Des Coudres[1]) ausgesprochene Vermutung, daß die kritische Temperatur über 1250° C und der kritische Druck weit über 1000 Atm., ja eventuell wie aus Widerstandsmessungen von Quecksilberfäden hervorgeht, über 2000 kg/cm² liegt, kann dahin mit Bestimmtheit beantwortet werden, daß der kritische Druck weit über 2100 Atm. liegen muß. Aus den schon erwähnten Dichtebestimmungen von J. Bender[2]) kann man, wenn man das Boyle-Mariottesche Gesetz hier als gültig annehmen will, die Dampfdrucke berechnen. Dies ist in der folgenden kleinen Tabelle geschehen.

t° C	P	$\overline{P}$
1400	1199,5	1000
1300	902,2	1025
1200	653,5	665
1100	332,5	425
1000	208,0	260
900	122,9	145
800	65,9	86

P sind die berechneten und $\overline{P}$ die in vorliegender Arbeit beobachteten Drucke. Man sieht hieraus eine qualitative Übereinstimmung. Die berechneten Druckwerte sind im Diagramm Nr. 3 durch Kreise markiert. J. Bender schätzt nun aus diesen Dichtebestimmungen die kritische Temperatur zu 1650° C, für die sich aus obigen Druckbestimmungen durch rohe Extrapolation ein kritischer Druck von 3000—3500 kg/cm² ergeben würde, der experimentell herzustellen leichter sein wird, als eine Temperatur von 1650° C in Quarzgefäßen zu erzeugen.

Diese Arbeit wurde mit dankenswerter finanzieller Unterstützung der Helmholtz-Gesellschaft im theoretisch-physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Geheimrat Prof. Dr. Th. Des Coudres, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, für das stets fördernde Wohlwollen und Interesse meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Auch Herrn Obermechanikermeister A. Dornfeld, der die mechanischen Arbeiten ausführte, möchte ich an dieser Stelle herzlichst danken.

1) Des Coudres, Bombe für hohe Drucke usw. Ber. d. math.-phys. Klasse d. Kgl. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig Bd. LXII.
2) J. Bender, Physik. Zeitschr. **16**, 246, 1915.

Leipzig, Januar 1925.

(Eingegangen 13. Januar 1925.)

Zur Behandlung des Schwarzschildschen Einkörperproblems im Rahmen der Hamilton-Jacobischen Theorie.

Von Johann Kudar.

Die Gleichungen der geodätischen Linien lassen sich aus einem Variationsprinzip ableiten. Dementsprechend ist der Gedanke naheliegend, die Bewegungsprobleme der allgemeinen Relativitätstheorie mit Hilfe der Methoden der Hamilton-Jacobischen Theorie zu behandeln.

In der vorliegenden Arbeit werden wir sehen, daß die Hamilton-Jacobische Theorie, wie in der klassischen Mechanik, so auch in der allgemeinen Relativitätstheorie die Möglichkeit liefert, die allgemeinen Lösungen des Einkörperproblems mit Hilfe der Lösung einer Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung einheitlich darstellen zu können.

I.

Die Gleichungen der geodätischen Linien eines Massenpunktes lauten in kovarianter Form:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{3} g_{ik}\frac{d^2x_k}{ds^2}+\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{bmatrix}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}=0,\\ &(i=0,1,2,3)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

worin:

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\beta i}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\right)$$

bezeichnet. Die Eigenzeit s ist durch das Linienelement:

$$ds^2=\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\,dx_i\,dx_k \quad (2)$$

definiert. Die Gleichungen (1) folgen aus dem Variationsprinzip:

$$\delta\int\sqrt{\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}}\,ds=0.$$

Ebenfalls lassen sich die Bewegungsgleichungen aus dem Variationsprinzip:

$$\delta\int\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\cdot ds=0$$

ableiten.

In Übereinstimmung mit den in der klassischen Mechanik gewohnten Einheiten und Vorzeichen werden wir die Lagrangesche Funktion:

$$L=-\frac{c^2}{2}\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} \quad (3)$$

(c = Lichtgeschwindigkeitskonstante)

anwenden; daraus folgen die Bewegungsgleichungen, wenn man die Lagrangeschen Derivierten von (3) gleich Null setzt:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial\frac{dx_i}{ds}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0.$$

Eliminieren wir in der Hamiltonschen Funktion:

$$H=\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial L}{\partial\frac{dx_i}{ds}}\frac{dx_i}{ds}-L=-\frac{c^2}{2}\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} \quad (4)$$

die Geschwindigkeiten $\frac{dx_i}{ds}$ mit Hilfe der Impulse $y_i=\frac{\partial L}{\partial\frac{dx_i}{ds}}$ und der Koordinaten, so gelten die kanonischen Gleichungen:

$$\frac{dx_i}{ds}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\quad (i=0,1,2,3). \quad (5)$$

H ist konstant und zwar hat nach (4) und (2) den speziellen Wert:

$$H=-\frac{c^2}{2}. \quad (6)$$

Setzen wir $y_i=\frac{\partial U}{\partial x_i}$, so bekommen wir die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial s}+H\left(\cdots x_i\cdots,\cdots\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdots\right)=0. \quad (7)$$

Ist $U(s,\cdots x_i\cdots,\cdots\beta_i\cdots)$ eine vollständige Lösung von (7) mit vier willkürlichen Konstanten β_i, dann werden die allgemeinen Integrale der kanonischen Gleichungen (5) mit acht Konstanten β_i, γ_i:

$$\frac{\partial U}{\partial\beta_i}=\gamma_i,\quad \frac{\partial U}{\partial x_i}=y_i,\quad (i=0,1,2,3). \quad (8)$$

Da die Eigenzeit in H explizit nicht auftritt, können wir:

$$U=\beta_0 s+V \quad (9)$$

setzen, worin V die Eigenzeit s nicht enthält. So wird aus (7) und (8):

$$H\left(\cdots x_i\cdots,\cdots\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdots\right)=-\beta_0. \quad (7a)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial\beta_0}=\gamma_0-s,\quad \frac{\partial V}{\partial\beta_k}=\gamma_k,\quad (k=1,2,3),\\ &\frac{\partial V}{\partial x_i}=y_i\quad (i=0,1,2,3).\end{aligned}\right\} \quad (8a)$$

Nach (6) hat β_0 den speziellen Wert: $\beta_0=\frac{c^2}{2}$, also ist β_0 eigentlich keine willkürliche Konstante.

Wir müssen aber β_0 in $U(\cdots x_i \cdots, \cdots \beta_i \cdots)$ als eine Integrationskonstante betrachten und erst in (8a) seinen fixierten Wert einsetzen. Die Konstante γ_0 in (8a) bezieht sich auf den Anfangswert der Eigenzeit.

Im folgenden werden wir nur statische Felder in Betracht ziehen, d. h. wir setzen voraus, daß x_0 in den g_{ik} nicht auftritt und $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ ist.

Dann wird in (7a):

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} = \text{const} = \beta_1. \tag{10}$$

Das ist das Integral der nullten geodätischen Gleichung, d. h. das Energieintegral, da aus:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx_0}{ds}}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial x_0} = 0$$

folgt:

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx_0}{ds}} = -c^2 g_{00}\frac{dx_0}{ds} = \beta_1. \tag{10a}$$

Die drei letzten dieser Gleichungen lassen sich aus der Lagrangeschen Funktion:

$$\left.\begin{aligned} L &= -c^2\sqrt{g_{00} + \frac{1}{c^2}\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}} \\ &\left(dt = \frac{dx_0}{c}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

ableiten; die nullte Gleichung in (1a) ist der zeitliche Differentialquotient der Energie:

$$\left.\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i}{dt}} - L = \\ &= c^2\frac{g_{00}}{\sqrt{g_{00} + \frac{1}{c^2}\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}}} = \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

H unterscheidet sich von $\frac{\partial V}{\partial x_0}$ in (10) nur im Vorzeichen. Zwischen den Impulsen der beiden Lagrangeschen Funktionen (3), (3a):

$$y_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i}{ds}} \text{ und } Y_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i}{dt}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

besteht der Zusammenhang:

$$y_i = cY_i. \tag{12}$$

Dementsprechend setzen wir in (7a):

$$V = \beta_1 x_0 + W,$$

dann wird aus (7) und (8a):

$$H\left(x_1, x_2, x_3; \beta_1, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \frac{\partial W}{\partial x_3}\right) = -\beta_0, \tag{7b}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial \beta_0} = \gamma_0 - s, \frac{\partial W}{\partial \beta_1} = \gamma_1 - x_0, \frac{\partial W}{\partial \beta_2} = \\ &= \gamma_2, \frac{\partial W}{\partial \beta_3} = \gamma_3; \frac{\partial W}{\partial x_0} = 0, \frac{\partial W}{\partial x_k} = y_k \\ &(k = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

Führen wir in (1) anstatt der Eigenzeit die kosmische Zeit x_0 mittels der Relation:

$$ds = \sqrt{\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\frac{dx_i}{dx_0}\frac{dx_k}{dx_0}}\, dx_0$$

ein, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\sum_{k=0}^{3} g_{ik}\frac{d}{dx_0}\left(\frac{dx_k}{dx_0}\Big/\sqrt{\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dx_0}\frac{dx_\beta}{dx_0}}\right) + \sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\left[\begin{matrix}\alpha\beta\\ i\end{matrix}\right]\frac{dx_\alpha}{dx_0}\frac{dx_\beta}{dx_0}\Big/\sqrt{\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dx_0}\frac{dx_\beta}{dx_0}} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{1a}$$

Führen wir in (11) die Impulse Y anstatt der Geschwindigkeiten ein, so wird die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(x_1, x, x_3; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}\right) = 0 \\ &\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} = Y_i\right), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

oder nach der Substitution:

$$V = -\beta_1 t + W$$

$$H\left(x_1, x_2, x_3; \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \frac{\partial W}{\partial x_3}\right) = \beta_1. \tag{13a}$$

Dann gilt nach (12):

$$W = \frac{W}{c},$$

worin W die Wirkungsfunktion in (7b) bedeutet. Lösen wir (7b) nach β_1[1]) auf und setzen $\beta_0 = \frac{c^2}{2}$, so ergibt sich Gleichung (13a).

Sei $W(x_1, x_2, x_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ eine vollständige Lösung der Gleichung (13a), dann werden die allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen:

1) β_1 ist mit der in Gleichung (10) ebenfalls mit β_1 bezeichneten Konstante entgegengesetzt gleich. Die übrigen Konstanten von (10) und (11) können nur im Faktor c voneinander abweichen.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \beta_1} &= \gamma_1 + t, \quad \frac{\partial W}{\partial \beta_2} = \gamma_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \beta_3} = \gamma_3; \\ \frac{\partial W}{\partial x_i} &= Y_i \qquad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Damit wurde gezeigt, wie man die Hamilton-Jacobische Theorie für statische Felder mit Hilfe der Lagrangeschen Funktion (3a) durchführen kann.

Nun werden wir diese Methode auf das Einkörperproblem der Einsteinschen Gravitationstheorie anwenden.

II.

Die Schwarzschild-Hilbertsche Form der Maßbestimmung ist:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \\ &\left(\alpha = \frac{2kM}{c^2};\ k = \text{Newtonsche Gravitationskonstante}\right); \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

dementsprechend wird die Lagrangesche Funktion:

$$L = -c^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{1}{c^2}\left|\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\right|}; \tag{16}$$

die Impulse:

$$Y_r = -\frac{c^2}{L}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}\cdot\frac{dr}{dt}, \quad Y_\vartheta = -\frac{c^2}{L} r^2 \frac{d\vartheta}{dt}, \quad Y_\varphi = -\frac{c^2}{L} r^2 \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{dt}; \tag{17}$$

die Hamiltonsche Funktion:

$$H = c^2 \frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{1}{c^2}\left|\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\right|}} = \text{const} = \beta_1. \tag{18}$$

Aus (17) folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{1}{c^2}\left|\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\right|}} = \\ &= 1 + \frac{1}{c^2}\left[\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) Y_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(Y_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta} Y_\varphi^2\right)\right]; \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

quadrieren wir (18), so ergibt sich nach (19):

$$c^4\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left[\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) Y_r^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{r^2}\left(Y_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta} Y_\varphi^2\right)\right]\right\} = \beta_1^2;$$

nach Einsetzen:

$$Y_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad Y_\vartheta = \frac{\partial W}{\partial \vartheta}, \quad Y_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

folgt daraus die Diffentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = \frac{\beta_1^2}{c^2}\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2} - \frac{c^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - \\ &- \frac{1}{r(r - \alpha)}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung wird:

$$W = \beta_3 \varphi + \int \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{\sin^2\vartheta}}\cdot d\vartheta + \int \sqrt{\frac{\beta_1^2}{c^2}\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2} - \frac{c^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - \frac{\beta_2^2}{r^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}}\cdot dr. \tag{21}$$

Daraus folgen die Integrale der Bewegungsgleichungen nach (14).

In der Newtonschen Mechanik lautet die entsprechende Lösung der Hamiltonschen Gleichung des Einkörperproblems:

$$W_0 = \beta_2 \varphi + \int \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{\sin^2 \vartheta}} \cdot d\vartheta + \int \sqrt{2E + \frac{2kM}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} \cdot dr \qquad (22)$$

(E = Energiekonstante).

Setzen wir in (21) $\beta_1 = c^2 + E$, so gewinnen wir nach einer Umformung im dritten Gliede:

$$W = \beta_2 \varphi + \int \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{\sin^2 \vartheta}} \cdot d\varphi + \int \sqrt{2E + \frac{E^2}{c^2} + \frac{c^2 \alpha}{r} + 2P - \frac{\beta_2^2}{r^2}} \cdot dr, \qquad (21a)$$

worin:

$$2P = \left(2E + \frac{E^2}{c^2} + \frac{c^2\alpha}{r}\right)\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2} - 1\right) - \frac{\beta_2^2 \alpha}{r^2 (r - \alpha)}$$

In (21a) ist $\frac{c^2 \alpha}{2r}$ das Newtonsche Potential:

$$\frac{c^2 \alpha}{2r} = \frac{kM}{r}$$

und P spielt etwa die Rolle einer perturbierenden Kräftefunktion.

Für die Konstante:

$$2E + \frac{E^2}{c^2} = \frac{\beta_1^2}{c^2} - c^2$$

ist die untere Grenze: $-c^2$. Der Wert dieser Konstante ist von entscheidender Bedeutung für die Form der Planetenbahnen. Mit Hilfe der Energiegleichung können wir folgende Fälle unterscheiden:

1. Verschwindet die Geschwindigkeit für $r \to \infty$, so gilt:
$$\frac{\beta_1^2}{c^2} - c^2 = 0;$$
2. ist die Geschwindigkeit endlich für $r \to \infty$, so gilt:
$$\frac{\beta_1^2}{c^2} - c^2 > 0;$$
3. im Falle $\frac{\beta_1^2}{c^2} - c^2 < 0$ kann r niemals unendlich werden.

Diese drei Fälle entsprechen bzw. den Parabel-, Hyperbel- und Ellipsenbahnen in der klassischen Mechanik.

Wir wenden uns jetzt zur Lichtbewegung. Die Gleichungen der geodätischen Nullinien sind:

$$\sum_{k=0}^{3} g_{ik} \frac{d^2 x_k}{dp^2} + \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ i \end{bmatrix} \frac{dx_\alpha}{dp} \frac{dx_\beta}{dp} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \qquad (23)$$

$$\sum_{i,k=0}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{dp} \frac{dx_k}{dp} = 0. \qquad (24)$$

Mit diesen Gleichungen ist p nur bis auf einen konstanten Faktor definiert.

Bei statischen Feldern wird das Integral der nullten Gleichung in (23):

$$g_{00} \frac{dx_0}{dp} = \text{const.}$$

Wir dürfen p so normieren, daß:

$$g_{00} \frac{dx_0}{dp} = 1 \qquad (25)$$

sei. Führen wir mittels (25) die kosmische Zeit x_0 anstatt p in die drei letzten der Gleichungen (23) ein, so bekommen wir für statische Felder:

$$\sum_{k=1}^{3} g_{ik} \frac{d}{dx_0}\left(\frac{dx_k}{dx_0} g_{00}\right) + \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \frac{\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ i \end{bmatrix}}{g_{00}} \frac{dx_\alpha}{dx_0} \frac{dx_\beta}{dx_0} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (23a)$$

Diese Gleichungen lassen sich aus dem „Fermatschen Prinzip":

$$\delta \int \sqrt{-\frac{\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{dx_0} \frac{dx_k}{dx_0}}{g_{00}}} \cdot dx_0 = 0 \qquad (26)$$

mit Hilfe der Bedingung:

$$g_{00} + \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{dx_0} \frac{dx_k}{dx_0} = 0 \qquad (27)$$

ableiten.

Demgemäß werden wir die Lagrangesche Funktion:

$$L = -\frac{1}{2 g_{00}} \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}$$

anwenden. So werden für die Hamiltonsche Funktion:

$$H = -\frac{1}{2 g_{00}} \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \qquad (29)$$

die kanonischen Gleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad \left(y_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i}{dt}}; \quad (i = 1, 2, 3)\right) \qquad (30)$$

gelten; es ist:

$$H = \text{const} = \beta_1$$

und nach (29) und (27):

$$\beta_1 = \frac{c^2}{2}. \tag{31}$$

Wir müssen aber β_1 in der Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung vorläufig als eine willkürliche Konstante betrachten und erst in die allgemeinen Integrale der kanonischen Gleichungen (30) ihren fixierten Wert (31) einsetzen.

Im Falle der Maßbestimmung (15) wird die Lagrangesche Funktion:

$$L = \frac{1}{2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\left\{\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\right\}, \tag{32}$$

also die Hamiltonsche Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1-\frac{\alpha}{r}}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right]\right\} = \beta_1. \tag{33}$$

Daraus ergibt sich:

$$W = \beta_3\varphi + \int\sqrt{\beta_3^2 - \frac{\beta_3^2}{\sin^2\vartheta}}\cdot d\vartheta + \left| \right. \\ \left. + \int\sqrt{\frac{2\beta_1}{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2} - \frac{\beta_2^2}{r(r-\alpha)}}\cdot dr, \right|$$

woraus die allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen folgen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial \beta_1} = \gamma_1 + t, \quad \frac{\partial W}{\partial \beta_2} = \gamma_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \beta_3} = \gamma_3; \\ &\frac{\partial W}{\partial r} = y_r, \quad \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = y_\vartheta, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = y_\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

In diesen Gleichungen ist $\beta_1 = \frac{c^2}{2}$ zu setzen.

Szeged (Ungarn), Mathematisches Seminar der Universität, Februar 1925.

(Eingegangen 18. Februar 1925.)

Gold in der Quecksilberlampe.

Von T. Retschinsky.

Aus Anlaß der Veröffentlichung[1]) des Zahlenmaterials über die Quecksilberlampe von Jaenicke möchte ich bemerken, daß zwischen dieser Lampe und der bekannten Hochdrucklampe von Heraeus[2]) kein wesentlicher Unterschied in den Verhältnissen der Temperatur und des Potentialgefälles besteht. Da es bei Fortführung der Versuche aber offenbar auf möglichste Steigerung von Temperatur und Potentialgefälle ankommen wird, möchte ich auf Folgendes hinweisen.

Die Lampe von Jaenicke hat bei Atmosphärendruck und 16 cm Bogenlänge die Stromstärke von 12,6 Ampere und Elektrodenspannung von 170 Volt, was dem Potentialgefälle von 11 $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ entspricht.

Die Lampe von Heraeus hat, nach meinen mit Dr. R. Küch gemeinsam ausgeführten Messungen[3]), den Druck 76,5 cm Hg, die Stromstärke 4,8 Ampere, die Spannung 174 Volt, die Länge 12 cm, das Potentialgefälle 14,5 $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$. Die gewöhnliche Heraeuslampe des Handels braucht ungefähr 165 Volt und 3,6 Ampere bei 11 cm Bogenlänge, was dem Potentialgefälle von 15 $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ entspricht.

Aus unseren Temperaturmessungen[1]) in der Lampe folgt weiter, daß die Steigerung der Elektrodenspannung von 30 auf 60 Volt die Temperatursteigung um ca. 1000° verursacht, dagegen die Steigerung der Stromstärke von 4 auf 8 Ampere kaum 150° Temperatursteigung. Daraus folgt, daß die hohe Temperatur in der positiven Säule der Lampe hauptsächlich durch das hohe Potentialgefälle verursacht ist. Auch die Geschwindigkeit der stoßenden Elektronen bei Atmosphärendruck in der Lampe ist vom Potentialgefälle abhängig.

Da das Potentialgefälle in der Heraeuslampe größer ist, als in der Lampe von Jaenicke, so sind auch die Verhältnisse für den Elektronenfang durch den Atomkern[2]) in dieser Lampe günstiger.

1) H. Stammreich, Der Zerfall des Quecksilberatoms. Naturwiss. XII, 745, 924.
2) R. Küch u. T. Retschinsky, Ann. d. Phys. **20**, 563, 1906.
3) R. Küch u. T. Retschinsky, l. c. 567, Tab. I.

1) K. Küch u. T. Retschinsky, Ann. d. Phys. **22**, 595, 1907.
2) F. Soddy, The Reported Transmutation of Mercury into Gold. Nature. 114. Aug. 16, S. 244, 1924.

Die Verhältnisse können in dieser Hinsicht bei der Heraeuslampe noch günstiger gemacht werden. Aus der Tabelle I[1]) ist ersichtlich, daß die Elektrodenspannung bis 249 Volt getrieben werden kann, was dem Potentialgefälle von ca. 21 $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ entspricht. Der Dampfdruck beträgt dabei 150 cm Hg.

Solche Lampen mit dem inneren Überdruck hat die Firma W. C. Heraeus für wissenschaftliche Zwecke früher fabriziert. Von gewöhnlichen Lampen unterscheiden sie sich nur dadurch, daß zwei konische Schliffe, der eine nach innen, der andere nach außen verjüngt, an den Elektroden angebracht sind. Der eine schützt gegen den Atmosphärendruck, der andere gegen den Überdruck in der Lampe. Außerdem ist die Wandstärke etwas größer, sonst würde die Lampe wegen des mit der Spannung wachsenden inneren Überdrucks explodieren.

Die Lebensdauer solcher Lampen ist geringer, da wegen der hohen Temperatur ein dunkler Beschlag an der Wand sich bildet, wahrscheinlich durch Zersetzung des Kieselsäureanhydrids. Später kommt noch die Entglasung des Quarzglases dazu.

1) R. Küch u. T. Retschinsky, Ann. d. Phys. **20**. 567. 1906, Tabelle I.

Lemberg (Lwów), Phys. Inst. d. Tech. Hochschule.

(Eingegangen 9. Februar 1925).

Entropie und Zustandswahrscheinlichkeit idealer Gase.

Von F. v. Hauer.

Die Boltzmannsche Gleichung

$$S = k \log W + \text{const.}$$

in ihrer ursprünglichen für ideale Gase geltenden Fassung sagt aus[1]), daß im stationären Zustande zwischen der thermodynamisch definierten Entropie des Gases und der Wahrscheinlichkeit für das Bestehen einer bestimmten Geschwindigkeitsverteilung der Molekel (der Maxwellschen) die angegebene Beziehung besteht. Die Gleichung läßt sich bekanntlich[2]) wesentlich verallgemeinern, indem man zeigt, daß wenn überhaupt eine Beziehung

$$S = f(W)$$

besteht, diese für ein abgeschlossenes System nur die obige Form annehmen kann. W läßt sich dabei als eine Funktion der beobachtbaren Koordinaten des Systems $(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ betrachten[1]), wenn wir unter W das Verhältnis $\frac{\vartheta}{\Theta}$ verstehen, wobei Θ eine sehr lange Beobachtungszeit bedeutet und ϑ derjenige Teil jener Beobachtungszeit, währenddessen die Koordinaten $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ bestimmte vorgegebene Werte zwischen λ_1 und $\lambda_1 + \Delta\lambda_1 \cdots \lambda_n$ und $\lambda_n + \Delta\lambda_n$ annehmen.

Andrerseits lehrt die Thermodynamik, daß die Entropie der Masseneinheit eines idealen Gases als Funktion von Temperatur und (spezifischem) Volum gegeben ist durch den Ausdruck

$$S = c_v \log (\tau v^{\frac{2}{3n}}) + \text{const.},$$

was wir auf die Form der Boltzmannschen Gleichung bringen können, indem wir $c_v = 3/2\,kn$ einführen (n = Anzahl der Molekel in der Masseneinheit) und schreiben

$$S = k \log \left(\tau^{\frac{3n}{2}} v^{n}\right) + \text{const.} \qquad (1)$$

Unter τ und v verstehen wir dabei diejenigen Koordinaten λ des Systems, die dasselbe im makroskopischen Sinne charakterisieren.

Bei der Gegenüberstellung der verallgemeinerten Boltzmannschen Gleichung und Gleichung (1) drängt sich nun die Frage auf, ob wir darnach $\log \left(\tau^{\frac{3n}{2}} v^{n}\right)$ abgesehen von einer additiven Konstanten gleich setzen dürfen $\log (W)$ und unter W dabei im obigen Sinne die Wahrscheinlichkeit dafür verstehen, daß Temperatur und Volum des Gases bestimmte vorgegebene Werte τ und v annehmen. Von vornherein möchte man diese Frage verneinen, denn die Beziehung kann offenbar nur dann einen Sinn haben, wenn das Gas verschiedene Temperaturen (und Volumina) annehmen kann, was aber nicht möglich ist, wenn es ein abgeschlossenes System (also mit konstanter Energie) darstellt; als nicht abgeschlossenes System aber fällt es aus dem Rahmen des oben erwähnten Beweises. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Beziehung doch richtig bleibt und der Boltzmannschen Gleichung unter Umständen auch bei einem nicht abgeschlossenen System die hervorgehobene einfache Bedeutung zukommt.

Damit das betrachtete Gas die Möglichkeit hat, alle beliebigen Temperaturen anzunehmen, denken wir uns dasselbe mit einem Wärmereservoir verbunden, dessen Temperatur über alle Maßen hoch ist. Als dieses Wärmereservoir denken wir uns ein gleiches Gas, demnach von so hoher Temperatur, daß die

1) L. Boltzmann, Vorl. üb. Gastheorie. 1. Teil.
2) M. Planck, Vorl. üb. d. Theorie der Wärmestrahlung.

1) A. Einstein, Ann. **33**, 1275, 1910.

Temperatur des Gesamtsystemes (T) sehr groß ist gegen jede in Betracht zu ziehende Temperatur, also auch sehr groß gegen die Temperatur τ des betrachteten Gases. Außerdem soll dem Gase ein sehr großer Raum von Volumen V zur Verfügung stehen. Wir fragen uns nun nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine bestimmte Menge von 1 g (n Molekel) eine Temperatur zwischen τ und $\tau + \delta\tau$ hat und daß diese n Molekel innerhalb eines Volumens v sind. $\delta\tau$ müssen wir uns dabei als eine zwar sehr kleine, aber jedenfalls endliche Temperaturdifferenz vorstellen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß n zufällig aus einem idealen Gas von der Temperatur T herausgegriffene Molekel eine mittlere Temperatur zwischen τ und $\tau + \delta\tau$ haben, habe ich in einer früheren Arbeit[1]) unter der alleinigen Annahme des Maxwellschen Verteilungsgesetzes berechnet, und zwar zu

$$W_n = K_n e^{-\frac{3n}{2}\frac{\tau}{T}} \cdot \tau^{\frac{3n}{2}-1}\,\delta\tau,$$

wobei

$$K_n = \frac{\left(\frac{3n}{2T}\right)^{\frac{3n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{3n-1}{2e}\right)^{\left(\frac{3n}{2}-1\right)}} = \frac{3n-1}{2\sqrt{2\pi e}}\left(\frac{e}{T}\right)^{\frac{3n}{2}}$$

ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekel, das sich regellos innerhalb eines Volumens V bewegt, in einem hervorgehobenen Momente gerade innerhalb eines Teilvolumens v sich befindet, ist v/V, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies für n Molekel gleichzeitig der Fall ist, ist $(v/V)^n$ und mithin die Wahrscheinlichkeit dafür, daß n Molekel die mittlere Temperatur τ haben und dabei innerhalb des Volumens v sind

$$W = \frac{3n-1}{2\sqrt{2\pi e}}\left(\frac{e}{T}\right)^{\frac{3n}{2}} \cdot e^{\frac{3n}{2}\frac{\tau}{T}} \cdot \tau^{\frac{3n}{2}-1}\,\delta\tau \left(\frac{v}{V}\right)^n,$$

wobei W wie notwendig eine reine Zahl ist, und somit

$$k \log W = \frac{3n}{2} k \left\{ \log \tau v^{\frac{2}{3n}} - \frac{\tau}{T} + \frac{2}{3n} \log \frac{\delta\tau}{\tau} + \right.$$
$$\left. + 1 \log T V^{\frac{2}{3n}} + \frac{2}{3n} \log \frac{3n-1}{2\sqrt{2\pi e}} \right|$$

Da T aus den oben angeführten Gründen über alle Maßen groß sein muß, so ist $\frac{\tau}{T}$ gegenüber dem ersten Glied des Klammerausdruckes zu vernachlässigen, desgleichen das nächste Glied, da $\delta\tau$ eine endliche Größe ist und der log durch die ungeheuer hohe Zahl n dividiert erscheint; die übrigen Glieder sind Konstante. Infolgedesssen erhalten wir, wenn wir wieder $c_v = \frac{3}{2} kn$ einführen

$$k \log W = c_v \log (\tau v^{\frac{2}{3n}}) + \text{const.},$$

also bis auf eine additive Konstante gleich der thermodynamisch definierten Entropie S des Gases.

Es konnte somit unter der alleinigen Annahme des Maxwellschen Verteilungsgesetzes gezeigt werden, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Gas, das mit einem als Wärmereservoir von ungeheuer hoher Temperatur dienenden Gas in Wärmeaustausch steht, bestimmte, vorgegebene Werte von Temperatur und Volum annimmt, mit der Entropie des Gases durch die Boltzmannsche Gleichung verknüpft ist, ein Ergebnis, das weder aus der ursprünglichen, noch aus der verallgemeinerten Form der Boltzmannschen Gleichung abgelesen werden kann.

1) Ann. d. Physik **47**, 365, 1915.

(Eingegangen 19 Februar 1925.)

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Die Abkühlung heißer Körper in Gasen und Flüssigkeiten.

Von R. Seeliger.

1. Einleitung.

In jedem physikalischen System, das aus Körpern von verschiedener Temperatur zusammengesetzt ist, findet ein Temperaturausgleich durch Energieströme statt. Besteht das System nur aus festen Körpern und aus materiefreien Raumteilen, so sind diese Ausgleichsvorgänge prinzipiell zu übersehen nach den Gesetzen der Strahlungstheorie und der Theorie der Wärmeleitung. Sehr viel verwickelter wird aber die Sachlage, wenn am Aufbau des Systems auch Flüssigkeiten oder Gase beteiligt sind, weil dann auch Konvektionsströme am Energietransport mitwirken können und in diesen eine Superposition von Wärmeleitungs- und von hydrodynamischen Vorgängen in Erscheinung tritt.

Wie die genauere Analyse ergeben hat, handelt es sich dabei um Vorgänge, die nur in allererster und roher Annäherung durch so einfache Ansätze zu beschreiben sind, wie sie bereits in der klassischen Wärmeleitungstheorie entwickelt worden und in jedem elementaren Lehrbuch als „äußere Wärmeleitung" behandelt sind. Bereits für den einfachsten Fall eines einzigen festen Körpers in einem allseitig unbegrenzten Medium treten für die theoretische Erfassung der Ausgleichsvorgänge sehr erhebliche Schwierigkeiten auf, die natürlich zunehmen für den Fall von mehr als einem sich abkühlenden festen Körper oder für den Fall eines begrenzten Mediums. Während man in den älteren mit derartigen Abkühlungsproblemen sich beschäftigenden und bis auf Newton zurückreichenden Arbeiten auf Grund von Messungen ein jeweils spezielles Zahlenmaterial gesammelt und durch empirische Interpolationsformeln lediglich eine Abhängigkeit des „Koeffizienten der äußeren Wärmeleitung" von den Versuchsbedingungen darzustellen versucht hat (als ein Beispiel von vielen sei etwa die Arbeit von Cardani (4) genannt), ist es in einem zweiten Stadium der Forschung gelungen, theoretische Ansätze für den Vorgang der Abkühlung aufzufinden, deren Prüfung an der Erfahrung dann erfolgreich vorgenommen werden konnte; der Begriff der äußeren Wärmeleitung ist aus diesen Ansätzen ganz verschwunden und an seine Stelle ein weniger summarischer komplizierterer Mechanismus getreten. Der Vorteil einer solchen nicht mehr rein empirischen Betrachtungsweise besteht vor allem darin, daß man nun auch Abkühlungsvorgänge einigermaßen quantitativ übersehen kann, die der unmittelbaren experimentellen Untersuchung schwer zugänglich sind oder für die noch keine direkten Messungen vorliegen.

Bei der Untersuchung des Wärmeverlustes eines allseitig von einer Flüssigkeit oder einem Gas umgebenen festen Körpers ist es nützlich und üblich, von vornherein den Wärmeverlust durch Strahlung abzuspalten. Dies kann geschehen entweder experimentell durch Abkühlungsversuche im hohen Vakuum oder durch Rechnung aus der Strahlungsgleichung des sich abkühlenden festen Körpers, wobei im allgemeinen der erstere Weg vorzuziehen sein wird. Man bezeichnet dann kurz als „Abkühlung" den gesamten Wärmeverlust abzüglich des Strahlungsverlustes (und wenn dies den Versuchsbedingungen nach nötig ist, natürlich auch abzüglich des Verlustes durch Wärmeleitung in unmittelbaren anstoßenden Festkörpern, wie Stromzuführungen, Stützen u. dgl.) und im speziellen als „natürliche Abkühlung" diesen Wärmeverlust in einem nicht durch äußere Mittel bewegten Medium im Gegensatz zu der „erzwungenen Abkühlung", bei welcher das Medium auf künstlichem Weg und unabhängig von der Temperatur des Körpers (z. B. durch Ventilatoren, Pumpen u. dgl.) in stationärer Strömungsbewegung gehalten wird.

Das Studium der Abkühlungsvorgänge in dem oben genannten Sinn ist nun vornehmlich für eine große Reihe praktischer Fragen von Interesse und ist wohl durch solche zuerst veranlaßt worden. Genannt seien als nächstliegende Beispiele etwa die Fragen, mit denen es die Heizungs- und die Kältetechnik zu tun hat, (Royds (25)) und bei denen es sich im Inneren der Heiz- bzw. Kühlkörper meist um künstliche, außen meist um natürliche Abkühlung handelt oder die Abkühlungsvorgänge an den Glühdrähten gasgefüllter Glühlampen. Daß auch Probleme rein wissenschaftlicher Natur mit den hier zu behandelnden häufig eng sich berühren, bedarf wohl kaum der eingehenderen Belegung. Kalorimetrische und thermometrische Messungen, in denen der zeitliche Verlauf der Versuche interessiert, vor allem aber auch die meisten stationären (nicht statischen) Temperatureinstellungen überhaupt gehören hierher, d. h. alle Aufgaben, bei denen das alte Problem der sog. „äußeren Wärmeleitfähigkeit" eine Rolle spielt. Zur Abgrenzung des Themas sei jedoch schon hier betont, daß in dem vorliegenden Bericht nicht nur die technische Seite der Fragestellung nicht behandelt werden, sondern daß auch nur die natürliche Abkühlung besprochen werden soll. An dieser lassen sich mit wenigen, gewisse hydrodynamische Dinge betreffenden Ausnahmen alle physikalisch wesentlichen Gesichtspunkte bereits erkennen; die künstliche Abkühlung wird Herr Schmekel in einem zweiten Bericht demnächst behandeln.

Bisher sind zwei Theorien soweit durchgeführt worden, daß sich mit der Erfahrung vergleichbare Ergebnisse gewinnen ließen. Sie gehen merkwürdigerweise von gerade entgegengesetzten Annahmen aus und seien als die „hydrodynamische Theorie" und als die „Gashauttheorie" bezeichnet; von dem Verhältnis dieser Theorien zueinander wird später ausführlich die Rede sein. In der ersteren wird angenommen, daß die Volumelemente des Mediums in der Umgebung des heißen Körpers geringere Dichte besitzen und deshalb auf sie neben dem räumlich konstanten hydrostatischen Druck ein Auftrieb wirkt, der eine nach den Gleichungen der Hydrodynamik zu errechnende Konvektionsströmung verursacht. Diese führt von der Oberfläche des heißen Körpers Wärme fort und zwar in der Weise, daß sich über sie eine Wärmeströmung nach den Gesetzen der Wärme-

leitung (die für ein bewegtes Medium erweitert sind) superponiert. Demgegenüber nimmt die Gashauttheorie an, daß den heißen Körper eine unbewegliche Schicht des Mediums umgibt und daß in dieser allein durch Wärmeleitung der gewöhnlichen Art, d. h. in einem relativ zur Körperoberfläche ruhenden Medium, der Transport von Wärme vom Körper in das Medium stattfindet.

2. Erste Fassung der hydrodynamischen Theorie.

Die hydrodynamische Theorie wurde aufgestellt und bereits bis zu brauchbaren Konsequenzen entwickelt von Boussinesq (2) (3). Als Vorläufer ist neben einem wenig ergiebigen Versuch von Oberbeck (17) die bekannte Lösung des Abkühlungsproblems von Lorenz (15) anzusehen, die für den speziellen Fall einer ebenen, vertikal stehenden Oberfläche bereits von ganz ähnlichen Ansätzen wie Boussinesq Gebrauch macht (vgl. dazu Wagner 26).

Die Durchführung der Theorie von Boussinesq führt naturgemäß auf mathematische Probleme — es handelt sich um die Lösung einer Randwertaufgabe für ein System simultaner partieller und im allgemeinen nicht linearer Differentialgleichungen — die nur in speziellen einfachen Fällen zu lösen sind. Die Bedeutung der Theorie liegt deshalb hauptsächlich darin, daß man durch eine einfache Transformation ihrer Ausgangsgleichungen zu gewissen bemerkenswerten Ähnlichkeitssätzen gelangen kann. Wenn wir zunächst die innere Reibung des abkühlenden Mediums unberücksichtigt lassen, erhalten wir mit den Abkürzungen:

h Wärmeverlust pro Oberflächen- und Zeiteinheit	des Körpers
ϑ Temperaturdifferenz gegen Temperatur des Mediums in großer Entfernung	
l lineare Dimension	
T Temperaturdifferenz gegen Temperaturen in großer Entfernung	des Mediums
K Wärmeleitfähigkeit	
C Wärmekapazität der Volumeinheit	
a Temperaturkoeffizient der Dichte ϱ	

die Grundgleichungen der Theorie mit den üblichen Bezeichnungen der Hydrodynamik bzw. der Wärmeleitungstheorie in der Form:

$$\text{I.}\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{du}{dt};\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{dv}{dt};$$
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z}=-g_0\,a\,T-\frac{dw}{dt};$$

$$\text{III.}\quad \frac{dT}{dt}=\frac{K}{C}\,\Delta T.$$

IV. in großer Entfernung vom Körper

$$(P, u, v, w, T)=0,$$

an der Oberfläche des Körpers

$$T=\Theta;\quad \lambda u+\mu v+\nu w=0.$$

Die Gleichung I ist die bekannte Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik, und zwar in der speziellen Form für inkompressible Medien. Dies scheint zunächst im Widerspruch zu stehen mit der Grundannahme der Theorie, daß durch Dichteänderungen des Mediums Auftriebskräfte und damit Konvektionsströme entstehen. Mit Boussinesq muß man deshalb annehmen, daß Volumenänderungen des Mediums nur soweit eine Rolle spielen, als sie das Gewicht der Volumeneinheit ändern, d. h. mit der Erdbeschleunigung multipliziert sind. Damit wird die Gültigkeit der Theorie eingeschränkt auf nicht zu kleine Dimensionen des heißen Körpers oder auf nicht zu große Temperaturgradienten. Wieweit bei kleinen Körpern die Näherung reicht, kann allerdings ohne vollständige Diskussion der Differentialgleichungen nur der Vergleich mit den Erfahrungen zeigen. Die Gleichungen II sind die Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik, in denen hier charakteristisch das Glied gaT ist, das den Auftrieb mißt. Gleichung III, die sich übrigens bereits bei Fourier (10) findet, ist die Wärmeleitungsgleichung, verallgemeinert für ein bewegtes Medium. Diese Erweiterung kommt dadurch zum Ausdruck, daß an Stelle des für ruhende Medien auftretenden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial T}{\partial t}$ nun der totale, d. h. nach Raum und Zeit zu nehmende auf der linken Seite steht, der ausführlich geschrieben die Form hat

$$\frac{dT}{dt}=u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}.$$

Die Gleichungen IV endlich enthalten die Grenzbedingungen, die nun natürlich teils kinematischer, teils thermischer Natur sind. Die erste formuliert, daß in hinreichend großer Entfernung vom Körper das Medium ruht und dort denselben Druck sowie dieselbe Temperatur hat wie ohne Gegenwart des Körpers und müßte für ein begrenztes Gefäß natürlich entsprechend modifiziert werden; die zweite sagt aus, daß an der Körperoberfläche die Mediumtemperatur gleich der Körpertemperatur ist, und daß die hydrodynamischen Strömungslinien senkrecht zur Körpernormale $(\lambda\mu\nu)$ stehen.

Man erkennt durch einfache Ausrechnung leicht, daß durch die Substitutionen

$$\text{V.}\quad (\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{C^2}{K^2 a \Theta}\right)^{1/3} (x, y, z)$$

$$\Xi = \Theta T, \quad P = \varrho \cdot \left(\frac{a \cdot \Theta \cdot K}{C}\right)^2 \cdot \Pi,$$

$$(u, v, w) = \left(\frac{\Theta \cdot a \cdot K}{C}\right)^{1/3} (U, V, W).$$

aus den Gleichungen I—III ganz analog gebaute entstehen, welche die Größen Θ, a, K, C, ϱ nicht mehr enthalten und deshalb ganz allgemein für jedes Medium und jede Temperatur Θ des Körpers gelten. Die genannten Substitutionen enthalten allerdings ebenfalls eine Beschränkung, da implizite angenommen werden muß, daß die Größen K und C Konstante sind, also insbesondere von der Temperatur nicht abhängen. Physikalisch dürfte auch dies darauf hinauskommen, daß keine zu großen Temperaturgradienten auftreten. Führt man durch dieselben Substitutionen die Transformation der Randbedingungen IV durch, so nehmen auch diese analoge von allen Konstanten unabhängige Formen an, wenn man zugleich den heißen Körper geeignet ähnlich vergrößert. Man findet so den Ähnlichkeitssatz: Es ist

$$h \text{ prop. } \Theta^{1/3} (K C^2 a)^{1/3}, \tag{1}$$

wenn

$$l \text{ prop. } \left(C^2 a \cdot \frac{\Theta}{K^2}\right)^{-1/3}. \tag{2}$$

Man kann nun allerdings nur unter Benutzung der empirisch gefundenen Abhängigkeit des h von Θ daraus nach dem Vorgang von Boussinesq ableiten, wie nun nicht für einen ähnlich vergrößerten, sondern für denselben Körper h von Θ, K, C und a abhängt. Einfacher und insofern allgemeiner als man auch noch die Abhängigkeit von l erhält, gelingt die Ableitung eines Ähnlichkeitssatzes nach der bekannten Methode der Dimensionalvergleichung, die Davis (6) angewendet hat. Benutzt man die Voraussetzung der Boussinesqschen Theorie, daß h nicht von ϱ abhängt, und von a und g nur in der Verbindung des Produktes (ag), so hat man allgemein anzusetzen:

$$h = K^m C^n \Theta^r (ag)^s \cdot l^t \tag{3}$$

und findet aus der Vergleichung der Dimensionen rechts und links, daß h die Form haben muß

$$h = \frac{K\Theta}{l} \cdot F\left(C^2 g \cdot l^3 a \cdot \frac{\Theta}{K^2}\right). \tag{4}$$

Die Funktion F läßt sich bestimmen, wenn man empirisch die Abhängigkeit des h von einer der im Argument enthaltenen Konstanten kennt, wobei alle anderen unverändert zu lassen sind.

Alle diese Betrachtungen gelten, wie bereits erwähnt wurde, nur unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen, die ihren Anwendungsbereich einschränken; doch geht diese Einschränkung nicht so weit, wie man vielleicht zunächst denken sollte und wir werden später (S. 292) auch in der Tat sehen, daß bereits durch die Theorie in dieser einfachen Form recht viele Messungsergebnisse befriedigend dargestellt werden können. Was zunächst die Vernachlässigung der inneren Reibung anlangt, so ergeben die Betrachtungen des nächsten Abschnitts, daß für alle Medien, in denen $C\nu/K$ (ν = kinematischer Reibungskoeffizient) denselben Wert hat, die allgemeinen unter Berücksichtigung der inneren Reibung geltenden Modellregeln unmittelbar übergehen in die spezielleren hier gefundenen. Damit ist die Anwendung dieser ermöglicht bereits für alle Gase mit jeweils einatomigen, zweiatomigen usw. Molekülen, da für diese $C\nu/K$ nach bekannten Ergebnissen der kinetischen Gastheorie (oder ebenfalls nach Ähnlichkeitsbetrachtungen, vgl. Weber (27)) jeweils denselben konstanten Wert hat. Zu bedenken ist dabei, daß für Gase $c'\eta/k$ konstant ist, wo c' die spez. Wärme in der üblichen Definition, η der Reibungskoeffizient ist: da hier C die spez. Wärme der Volumeneinheit bedeutet, ist $c' = C/\varrho$ und also

$$c'\eta/K = C \cdot \eta/\varrho \cdot K = C\nu/K.$$

Man kann sich den formalen Befund, daß die innere Reibung aus den Transformationsgleichungen herausfällt, wenn $C\eta/K$ konstant ist, wohl dadurch verständlich machen, daß mit einer Änderung von η, d. h. mit einer Änderung der Intensität der Konvektionsströme eine gleichsinnige Änderung von K, d. h. eine entgegengesetzt gerichtete Änderung der Intensität der Wärmeleitungsströme verbunden ist und hierdurch eine weitgehende Kompensation eintritt. In ähnlicher Weise kann man sich übrigens (Boussinesq (2) und Compan (5)) durch eine teilweise Kompensation entgegengesetzt wirkender Effekte verständlich machen, daß die Abkühlung mit Abnahme der Gasdichte nur verhältnismäßig langsam abnimmt; einerseits nimmt zwar die Wärmekapazität der von dem heißen Körper aufsteigenden Gasmassen ab, andererseits aber nimmt die Strömungsgeschwindigkeit zu. Eine zweite Vernachlässigung in den Grundlagen der Theorie war die, daß die eingehenden Konstanten unabhängig von der Temperatur sind und daß g und a nur in der Verbindung (ga) auftreten. Die physikalische Bedeutung dieser Einschränkungen wurde bereits oben besprochen.

3. Erweiterung der hydrodynamischen Theorie.

In drei ausführlichen Untersuchungen hat Davis (6) (7) (8) die Ansätze von Boussinesq

soweit vervollständigt, daß die eben genannten Mängel recht weitgehend behoben zu sein scheinen. Diese Vervollständigung geht nach zweierlei Richtung. Einmal wird die innere Reibung des abkühlenden Mediums berücksichtigt, und zwar von Anfang an und in strenger Form durch Benutzung der bekannten hydrodynamischen Gleichungen für reibende Flüssigkeiten; ferner aber wird die räumliche Konstanz der eingehenden Konstanten, d. h. physikalisch ihre Temperaturunabhängigkeit, nun nicht mehr vorausgesetzt, sondern wenigstens für Gase aus den von der kinetischen Gastheorie gelieferten Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} K &= K_0 \cdot C \cdot \eta \\ \eta &= KT^{1/2}/(1 + BT) \\ C &= A \cdot (1 + aT) \\ \varrho &= 273\varrho_0/T \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

die Abhängigkeit von der Temperatur entnommen und insofern berücksichtigt, als die einer Mitteltemperatur im Medium entsprechenden Werte verwendet werden. Der Erfolg der ersten Erweiterung ist vorauszusehen und besteht darin, daß nun auch die Vorgänge in Flüssigkeiten wenigstens bis zu nicht zu hohen Temperaturen des heißen Körpers der theoretischen Erfassung zugänglich sind und damit der Geltungsbereich der Modellregeln bezüglich der Variation von Cv/K ganz außerordentlich erweitert wird. Der Erfolg der zweiten Erweiterung läßt sich nicht so unmittelbar voraussehen und kann erst durch einen Vergleich mit der Erfahrung erkannt werden. Wie dieser aber — die Einzelheiten werden in Abschn. 6 besprochen — zeigt, scheint nun für Gase dadurch auch der Bereich der hohen Temperaturen und kleinsten Körperdimensionen der hydrodynamischen Theorie zugänglich zu sein, der vordem der Gashauttheorie (Abschn. 4) vorbehalten schien.

Die Betrachtungen zur Ableitung von Modellregeln unter Berücksichtigung der inneren Reibung verlaufen ganz analog den früheren und können wieder entweder an die Differentialgleichungen und deren Transformation oder an Dimensionalbetrachtungen anschließen (6) (8). Im ersteren Fall lauten die den Gl. I—III, S. 284 entsprechenden nun (ν = kinematischer Reibungskoeffizient):

$$\mathrm{I}' \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\mathrm{II}' \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{du}{dt} + \nu \Delta u, \ldots$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z} = -gaT - \frac{dw}{dt} + \nu \Delta w$$

$$\mathrm{III}' \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{K}{C} \cdot \Delta T$$

Die Grundbedingungen IV bleiben unverändert und die Transformationsgleichungen werden nun entsprechend den Gl. V, S. 285:

$$\mathrm{V}' \qquad (\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{\Theta g a C}{K\nu}\right)^{1/3} \cdot (x, y, z),$$

$$\Xi = \Theta T; \qquad P = \varrho \cdot \left(\frac{\Theta^2 a^2 g^2 K \nu}{C}\right)^{1/3} \Pi$$

$$(u, v, w) = \left(\frac{\Theta g a K^2}{c^2 \nu}\right)^{1/3} (U, V, W).$$

Setzt man dies in die Differentialgleichungen I′—III′ ein, so sieht man, daß man wiederum diesen ganz analog gebaute, jedoch keine individuellen Konstanten mehr enthaltende erhält unter zwei Bedingungen. Entweder muß $Cv/K = 1$ sein, wodurch die Transformation (angenähert) auf Gase beschränkt bleibt, oder aber, und dies ist viel wichtiger und eröffnet den Weg zur Behandlung der Flüssigkeiten, es müssen $du/dt \ldots dw/dt$ zu vernachlässigen sein gegen $\nu \Delta u \ldots \nu \Delta w$. Physikalisch heißt dies, daß entweder die Reibung groß oder die Temperatur nicht zu hoch sein muß. Verfährt man ganz ebenso mit den Randbedingungen, so erhält man ähnliche Vorgänge bei gleichzeitiger ähnlicher Veränderung des heißen Körpers. Es ergibt sich so die Modellregel, daß

$$h \text{ prop. } K\Theta \cdot \left(\frac{\Theta g a C}{K\nu}\right)^{1/3} \text{ wenn } l \text{ prop. } \left(\frac{\Theta g a C}{K\nu}\right)^{-1/3} \qquad (6)$$

oder zusammengefaßt, daß

$$h = \frac{K\Theta}{l} \cdot F(l^3 \cdot \Theta g a C / K\nu). \qquad (7)$$

Wenn $C\nu/K$ eine Konstante ist, kann man in (6) und (7) ν eliminieren und durch K/C ersetzen und erhält dann, wie bereits oben angegeben wurde genau die Formeln (1) und (2) S. 285. Dimensionalbetrachtungen (zuerst vorgeschlagen von Rayleigh (23) für künstliche Abkühlung; durchgeführt von Davis), führen analog wie früher zu der allgemeineren Modellregel

$$h = \frac{K\Theta}{l} \cdot F \cdot (l^3 \cdot \Theta g a C^2 / K^2) \cdot f(C\nu/K). \qquad (8)$$

Unter der Annahme, daß g und ν nur in der Kombination g/ν eingehen, wird (8) mit (7) identisch; physikalisch bedeutet diese Annahme, daß die stationäre Strömung entsteht durch das Gleichgewicht zwischen der Wirkung von Schwerkraft und Reibungskraft. Für $C\nu/K$ = const wird natürlich (8) wieder identisch mit (4) S. 285.

Die Modellregeln lassen sich endlich für spezielle Körperformen noch etwas einfacher schreiben. Im Hinblick auf die Ausführbarkeit von Versuchen verdient hier am meisten Inter-

esse die Form des (horizontalen) Kreiszylinders. Da hier h unabhängig von der Länge ist, kann man als charakteristische Körperdimension den Zylinderdurchmesser d einführen und erhält dann für den Wärmeverlust H pro Längeneinheit und Grad Temperaturdifferenz aus der allgemeinen Formel (8) die folgende

$$H = K \cdot F\,(C^2 g d^3 a \Theta / K^2)\, f(C\nu/K) \qquad (9)$$

bzw. aus (7)

$$H = K \cdot F \cdot (d^3 \Theta g a C / K \nu). \qquad (10)$$

Speziell für den Vergleich verschiedener Gase kann man unter Weglassung der dann gleichgültigen Konstanten g und a und nach Ersatz von K durch $C \cdot \nu$ schreiben

$$H = K \cdot F\,(d^3 \Theta / \nu^2). \qquad (11)$$

Für K und ν sind hierin für den Fall hoher Körpertemperatur wie oben schon erwähnt, in erster Näherung die nach der Gl. (5) berechneten Mittelwerte zu setzen.

Anschließend sei eine ebenfalls aus Dimensionsbetrachtungen abgeleitete Formel von Rice (24) nur kurz erwähnt, da ihre Ableitung in der mitgeteilten vorläufigen Notiz nicht angegeben ist; sie hat die Form

$$H = \alpha \cdot (K/\nu_0 \cdot C)^\beta\, [\nu / (a g \Theta)^{1/3} l^{4/3}]^\gamma,$$

worin α, β und γ empirisch zu bestimmende Konstante sind, die für horizontal liegende Zylinder zu 2,12, 0,25 und 0,50 angegeben werden.

4. Die Gashauttheorie.

Der Geltungsbereich der hydrodynamischen Theorie ist durch die zuletzt besprochenen Verbesserungen sicherlich erheblich erweitert worden. Man kann ihn jedoch, wie wir sahen, nur in speziellen Fällen wirklich abschätzen und insbesondere z. B. für hohe Temperaturen und kleine Körperdimensionen kann (auch für den speziellen Fall der Gase) nur ein Vergleich mit der Erfahrung zeigen, wieweit die Voraussetzungen der Theorie noch erfüllt sind. Dazu kommt, daß in der derzeitigen Gestalt, d. h. ohne tatsächliche Integration der Differentialgleichungen, die der Theorie zugrundeliegen, keine numerischen Werte, sondern nur Modellregeln zu erhalten sind und man deshalb aus der Theorie, insofern wenigstens die greifbaren Ergebnisse in Betracht kommen, nicht viel mehr entnehmen kann als eine allerdings sehr schöne und anschauliche Interpretation allgemeiner Dimensionalbetrachtungen. Gerade für die Fälle kleiner Körperdimension und hoher Temperatur, für welche die Brauchbarkeit der hydrodynamischen Ansätze theoretisch noch zweifelhaft sein kann, hat nun Langmuir (13) von scheinbar ganz anderen Vorstellungen ausgehend, eine Theorie der Abkühlung in Gasen aufgestellt (bereits in seiner Göttinger Dissertation (12) vorgeschlagen) und dann (14) weiter entwickelt). Langmuir nimmt an, daß mit steigender Temperatur die Abkühlung durch Konvektionsströme immer mehr zurücktritt gegen die durch Wärmeleitung, und daß sich die Verhältnisse bei genügend hoher Temperatur so auffassen lassen, als ob um den heißen Körper eine Gasschicht oder Gashaut läge, die als unbeweglich angesehen werden kann, und in der nur die Wärmeleitung die Energie des heißen Körpers dissipiert. An der Außenseite dieser Gashaut ist natürlich die Abkühlung durch Konvektionsströme nach wie vor wirksam und sogar wesentlich, da sie dort die Temperatur sehr nahe auf dem für große Entfernung vom heißen Körper geltenden Wert hält. Man kann sich die Verhältnisse auch physikalisch einigermaßen anschaulich machen in folgender Weise. Steigert man nur die Temperatur, so nimmt mit abnehmender Gasdichte die Kraft, welche die Konvektionsströme antreibt (d. h. der Auftrieb), ab, die in Bewegung zu setzenden Gasmassen nehmen aber ebenfalls ab, so daß die Beschleunigungen ungefähr dieselben bleiben. Zugleich aber nimmt die Wärmekapazität der Gasmassen und damit ihr Abkühlungsvermögen ab und vor allem aber die innere Reibungskraft nach der kinetischen Gastheorie zu, so daß die Wirksamkeit der Konvektion rasch kleiner wird. Andererseits nimmt die Wärmeleitung zu, so daß man also in der Tat bei genügend hohen Temperaturen in ein Gebiet kommt, in dem nur noch die Wärmeleitung eine Rolle spielt. Dasselbe gilt, wenn man bei konstanter Temperatur die Dimensionen des Körpers genügend verkleinert; man erkennt dies aus Dimensionalbetrachtungen oder anschaulicher daraus, daß mit abnehmender Körpergröße für die an den Körper grenzende Gasschicht das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen ständig zunimmt. Verringert man hingegen nur den Druck, so bleiben die Reibung und die Wärmeleitung, die vom Druck unabhängig sind, ungeändert, und man kommt deshalb nun nicht in ein Gebiet, in dem die Langmuirsche Vereinfachung anzuwenden ist.

Durch derartige Betrachtungen läßt sich natürlich die quantitative Richtigkeit der Langmuirschen Voraussetzungen nicht beweisen, da hierüber eben auch nur die vollständige Lösung der durch die Temperaturabhängigkeit insbesondere von K und η entsprechend erweiterten Differentialgleichungen der hydrodynamischen- und der Wärme-Strömung Aufschluß geben könnte. Man gelangt aber nun zu

einer richtigen Beurteilung des Verhältnisses der beiden „scheinbar" ganz verschiedenen Theorien zu einander und kann dieses wohl so formulieren, daß die hydrodynamische Theorie in ihrer allgemeinen Form, d. h. bei Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der eingehenden Konstanten bereits in den Differentialgleichungen, stets und für alle speziellen Fälle gültig ist, und daß die Ansätze von Boussinesq einerseits, der von Langmuir andererseits lediglich brauchbare und der Diskussion zugängliche Näherungen dieser Theorie für zwei extreme Fälle darstellen. Die Erweiterung von Davis nimmt ihres größeren Geltungsbereiches wegen eine vermittelnde Stellung ein, wobei es nicht von vornherein zu entscheiden ist, wieweit sie auch noch in das Langmuirsche Gebiet hineinreicht.

In diesem Zusammenhang ist die Frage von Interesse, ob man nicht durch optische Methoden direkten experimentellen Aufschluß über die Strömungsverhältnisse in der Umgebung des heißen Körpers gewinnen könnte. Qualitativ läßt sich die Existenz der aufsteigenden Konvektionsströme ohne Schwierigkeit demonstrieren, eingehender und insbesondere in Hinblick auf die Annahmen der Gashauttheorie scheinen sich damit jedoch nur Ray u. Pramanik (für Luft) und Nelson (für Wasser, Alkohol, Olivenöl und Glyzerin) beschäftigt zu haben. Nelson (16) hat für die Strömungsvorgänge in der Umgebung eines elektrisch geheizten dünnen Drahtes durch direkte photographische Aufnahmen in parallelem Licht sowohl wie durch ein der Schlierenmethode ähnliches Abbildungsverfahren Bilder der Strömungslinien erhalten; für die Existenz einer feststehenden Schicht direkt an der Drahtoberfläche läßt sich aus den Bildern jedoch kaum mehr als ein wenig deutlicher Hinweis entnehmen. Auch die von Ray u. Pramanik (21) nach ähnlichen Methoden für die Abkühlung von Drähten in Luft erhaltenen photographischen Bilder zeigen, wenigstens in den Reproduktionen, die Existenz der unbewegten Haut nicht deutlich. Überzeugender ist die Sondierung der Temperaturverteilung um die Drähte mit Hilfe feiner Thermoelemente, die sehr anschaulich die Voraussetzungen der Langmuirschen Theorie bestätigt und die geschlossenen Isothermenflächen zeigt.

Ein zwar indirekter aber recht überzeugender Beweis, den bereits Langmuir selbst angeführt hat, ist hingegen für die Existenz einer unbewegten Haut daraus zu entnehmen, daß die Abkühlung für horizontale und vertikale Lage des Drahtes praktisch dieselbe ist.

Die Durchführung der Rechnungen im einzelnen verläuft nach Langmuir folgendermaßen. Ist $K = K(T)$ der Wärmeleitungskoeffizient des Gases, so ist der Wärmefluß durch ein Flächenelement ds mit der Normalen dn

$$dq = K \cdot ds \cdot \frac{dT}{dn}. \tag{12}$$

Ist dq auf einer jeden Isothermenfläche s konstant, so wird der Wärmefluß durch eine solche Fläche s

$$q = s \cdot K \frac{dT}{dn}. \tag{13}$$

Für den stationären Zustand muß q für alle isothermen Flächen s denselben Wert haben, so daß man durch Integration zwischen zwei Flächen s_1 und s_2, deren Temperaturen T_1 und T_2 sind und auf denen die Normalenlänge die Werte n_1 und n_2 hat, erhält

$$q \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{s} = \int_{T_1}^{T_2} K dT. \tag{14}$$

Es sei nun im speziellen s_0 die Oberfläche des heißen Körpers, s_1 die äußere Oberfläche der Gashaut, T_0 die Temperatur des heißen Körpers und T_1 die Gastemperatur auf s_1. Dann erhält man für die drei Körperformen mit univariablem Temperaturfeld

a) Ebene

$s = 1$ unabhängig von $n\,(= x)$

$B =$ Dicke der Gashaut,

$$q = K \cdot \frac{dT}{dx};$$

$$q = \frac{\int_{T_0}^{T_1} K dT}{B} = \frac{\varphi(T_0, T_1)}{B}. \tag{15}$$

b) Zylinder

$s = 2\pi r$

$a/2$ = Radius d. Körpers;

$b/2$ = Radius d. Gashaut

$$q = 2\pi r K \frac{dT}{dr}$$

$$q = 2\pi \frac{\int_{T_0}^{T_1} K dT}{\int_{a/2}^{b/2} \frac{dr}{r}} = \frac{2\pi \varphi(T_0, T_1)}{\ln b/a} \tag{16}$$

c) Kugel

$s = 4\pi r^2$

$a/2$ = Radius d. Körpers;

$b/2$ = Radius d. Gashaut

$$q = 4\pi r^2 \cdot K \frac{dT}{dr};$$

$$q = 4\pi \frac{\int_{T_0}^{T_1} K dT}{\int_{a/2}^{b/2} \frac{dr}{r^2}} = \frac{2\pi\varphi(T_0, T_1)}{1/a - 1/b} \quad (17)$$

Der Wärmeverlust q des Körpers hängt also in allen drei Fällen bei gegebener Temperatur T_0 und gegebener Größe a von der Dicke der Gashaut und von der Temperatur T_1 der äußeren Oberfläche der Gashaut ab; dies ist physikalisch ohne weiteres einzusehen, ebenso daß T_0 und T_1 nicht einzeln, sondern nur in der Verbindung $\varphi(T_0, T_1)$ in die Formeln eingehen, die für konstantes K übergeht in eine der Temperaturdifferenz $T_0 - T_1$ der beiden Oberflächen der Gashaut proportionale Größe. Langmuir behandelt nur die Abkühlung an Zylindern (dünnen Drähten) und geht nun, um die Formel (16) praktisch verwerten zu können, folgendermaßen vor. Er nimmt hypothetisch an, daß für ebene und zylindrische Begrenzungsflächen unabhängig von der Krümmung a der Körperoberfläche sowohl T_1 wie der Gradient von T an der äußeren Oberfläche der Gashaut denselben Wert haben. Dann folgt also aus den Beziehungen (15) und (16), die wir in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} r \cdot K \frac{dT}{dr} &= \frac{\varphi(T_0, T_1)}{\ln b/a} \\ K \frac{dT}{dx} &= \frac{\varphi(T_0, T_1)}{B} \end{aligned}\right| \quad (18)$$

Da T_1 und deshalb für $x = B$ bzw. $r = b/2$ auch K in beiden Gleichungen denselben Wert haben sollen und dort auch $dT/dr = dT/dx$ sein soll, folgt, daß

$$b \cdot \ln b/a = 2B. \quad (19)$$

Es ist dies also eine Beziehung zwischen den Dicken der Gashaut an einer ebenen und an einer zylindrischen Oberfläche. Wenn man dieselben Verknüpfungsbedingungen für Ebene und Kugel annimmt, so erhält man analog

$$\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = B. \quad (19a)$$

Durch die Gl. (19) und (19a) ist eine Beziehung zwischen den Dicken der Gashäute an den Körpern verschiedener Form gegeben, die zusammen mit Gl. (15)—(17) die Abkühlung an allen liefert, wenn sie für eine bekannt ist. Zur Berechnung des Absolutwertes der Abkühlung muß man also nur noch kennen die Dicke einer Gashaut und die Größe $\varphi(T_0, T_1)$. Diese aber ist zu berechnen aus der gaskinetisch bekannten Temperaturabhängigkeit des Wärmeleitungsvermögens K, wenn man für die Temperatur T_1 der äußeren Grenze der Gashaut die Temperatur in großer Entfernung vom heißen Körper, d. h. die Temperatur des Beobachtungsraumes, ansetzen darf, und es ist diese Funktion von Langmuir für einige Gase übersichtlich tabuliert.

Unbekannt ist also nur noch die Gashautdicke an einem der genannten Körper. Aus Messungen der Abkühlung an Drähten von verschiedenen Durchmessern und verschiedenen Temperaturen hat nun Langmuir die Hautdicke B für ebene Oberfläche berechnet und gefunden, daß B unabhängig von der Körpertemperatur T_0 ist und nur von der Natur des Gases abhängt; es ergab sich bei Atmosphärendruck für Luft der Wert $B = 0{,}43$ cm, für Wasserstoff $B = 3{,}05$ cm. Das überraschende Ergebnis der Temperaturunabhängigkeit von B kann man sich anschaulich nur schwer verständlich machen; man wird es vorläufig als einen unter Benutzung der übrigen Annahmen der Theorie folgenden empirischen Befund hinnehmen müssen, der die Verhältnisse allerdings sehr vereinfacht. Neuerdings hat zwar Rice (vgl. S. 287) aus Dimensionsbetrachtungen allgemeine Formeln für die Gashautdicke abgeleitet, die nur Konstanten des Mediums enthalten; sie können aber natürlich nicht als Beweis des Ergebnisses von Langmuir angesehen werden.

5. Erweiterungen der Gashauttheorie.

Wenn man die Theorie in der einfachen, bisher besprochenen Form auf niedere Drucke anwenden will, stößt man auf eine überraschende Schwierigkeit. Berechnet man nämlich nach Gl. (16) die Dicke der Gashaut aus den gemessenen Wärmeverlusten, so findet man eine rapide Zunahme mit abnehmendem Gasdruck, wie dies z. B. die folgenden Zahlen für einen Zylinder von 0,007 cm Durchmesser im Wasserstoff zeigen:

p	$2\pi / \ln b\,d$	b
750 mm	1,25	1,08 cm
200	0,88	9,0
100	0,72	45,0
50	0,56	530,0

in denen b der Durchmesser, d. h. also abzüglich des hier zu vernachlässigenden Radius des heißen Drahtes die doppelte Dicke der Gashaut ist. Es würde also schon bei Drucken von etwa 200 mm abwärts die Gashaut über das den heißen Draht umschließende Gefäß, das in diesen Versuchen einen Durchmesser von 7 cm hatte, hinausreichen, d. h. der Wärmeverlust würde kleiner sein, als er sich ohne Konvektionsströme

nur aus der Wärmeleitung allein berechnet. Wenn auch die Folgerung, die Langmuir daraus gezogen hat, daß nämlich die Konvektionsströme bei diesen Drucken überhaupt keine Rolle mehr spielen, nicht zwingend ist, so ist doch eine andere Folgerung von großer Bedeutung. Er schließt nämlich aus dem genannten Befund (primär kommt die Abnahme des errechneten Wertes von $2\pi/\ln b/d$ hier in Betracht), daß sich bei tieferen Drucken an der Oberfläche eines heißen Körpers ein Temperatursprung ausbildet, derart, daß an der Oberfläche zunächst eine Gasschicht I liegt, in der die Ansätze der klassischen Theorie der Wärmeleitung nicht gelten und an diese erst eine Schicht II sich anschließt mit kontinuierlichem Temperaturabfall und Wärmetransport nach den üblichen Wärmeleitungsgesetzen. Die Vorgänge in der Schicht I lassen sich nach dem Muster der bekannten Arbeiten von Smoluchowski und Knudsen verstehen, deren hier wesentliches Ergebnis in dem Nachweis der Existenz eines solchen Temperatursprunges zu sehen ist. Für einen zylindrischen Körper vom Durchmesser a ergibt die Rechnung für die von der Längeneinheit durch die Temperatursprungschicht abgeführte Wärmemenge in Kalorien

$$Q = \pi \cdot a \cdot \frac{C_v}{M} \alpha \cdot \Delta T \cdot \sqrt{\frac{M}{2\pi R \cdot T_0}} \cdot p,$$

worin M das Molekulargewicht, C_v die Molwärme und α der Knudsensche Akkommodationskoeffizient des Gases, T_0 die Temperatur des Körpers und ΔT der Temperatursprung ist. Andererseits läßt sich q ganz ebenso wie früher berechnen, wenn man nun nur an Stelle des damals benutzten Durchmessers a des Körpers einen fiktiven Durchmesser $(a + a')$ und an Stelle von T_0 den Wert $T_0 - \Delta T$ benutzt, wo a' die Dicke der Temperatursprungschicht I und ΔT der Temperatursprung ist. Wie Langmuir zeigt, findet man mit $a'/2 = \lambda$ = mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle gute Übereinstimmung der aus beiden Formeln und aus dem gemessenen Wert von q sich ergebenden Größen von ΔT. Die folgende Tabelle für Stickstoff und für einen Draht von 0,007 cm Durchmesser auf der Temperatur von 2400° abs. möge die Verhältnisse an einem Beispiel quantitativ veranschaulichen:

p (mm Hg)	750	200	100	50	10	1
λ (cm)	$1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$	$4{,}6 \cdot 10^{-3}$	$3{,}1 \cdot 10^{-2}$
ΔT (Grad)	40	135	240	336	845	1575

Durch diese Überlegungen ist u. U. die Möglichkeit gegeben, den Wärmeverlust für alle Radien und Drucke rechnerisch zu finden, denn es ist

$$q = 2\pi \frac{\varphi(T_0 - \Delta T, T_1)}{\ln \frac{b}{a + 2\lambda}} \qquad (20)$$

nach der Theorie in der ursprünglichen einfachen Form und

$$Q = q = \Delta T \cdot f(a, p) \qquad (20a)$$

aus der Theorie des Temperatursprungs. Wenn nun das den Draht umschließende Gefäß dem heißen Körper geometrisch ähnlich und kleiner als die Gashaut ist, so ist in der ersten Gleichung $b = D$ = Durchmesser des Gefäßes zu setzen und es liefern dann die beiden Gleichungen durch Elimination von ΔT eine Gleichung für q.

Durch die Berücksichtigung des Temperatursprunges an der Oberfläche des heißen Körpers ist ein neuer, der hydrodynamischen Theorie auch in ihrer allgemeinen Form fremder Gesichtspunkt hinzugekommen. Allerdings wird nur bei tiefen Drucken ein nennenswerter Einfluß zu erwarten sein; hier aber können, wie die oben angegebenen Zahlen für ΔT zeigen, durch die Annahme der einfachen Grenzbedingung Temperatur des Gases = Temperatur des Körpers erhebliche Fehler entstehen. Daß bei tiefen Drucken und hohen Temperaturen unter Umständen noch eine andere Erweiterung prinzipieller Natur notwendig werden kann, hat ebenfalls Langmuir (14) bereits bemerkt. Man erkennt dies am besten, wenn man bei jeweils konstanter Temperatur des Körpers die Abkühlung in Abhängigkeit vom Druck betrachtet. In Stickstoff zeigt sich eine stetige Abnahme mit abnehmendem Druck, in Wasserstoff hingegen findet man bei hohen Temperaturen Kurven der in Fig. 1 (für einen Wolframdraht von 0,007 cm Durchmesser) gezeichneten Art, die ein Ansteigen der Abkühlung mit abnehmendem Druck zeigen. Parallel damit geht, daß man dann die abfließende Wärmemenge nicht mehr wiedergeben kann durch die einfache Formel (16) bzw. (20). Langmuir hat diesen Befund gedeutet durch die Wirkung einer mit der Temperatur zunehmenden Dissoziation des Gases und seine Theorie entsprechend erweitert (14). Die Grundlagen dieser theoretischen Entwicklungen sind kurz die folgenden. Man kann die insgesamt abfließende Wärmemenge q teilen in zwei Summanden $q_w + q_D$, von denen q_w durch die normale Wärmeleitung bedingt und nach Gl. (20) darzustellen ist, während q_D dem

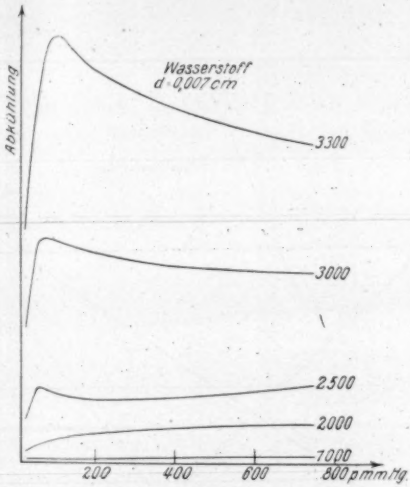


Fig. 1.

Dissoziationseffekt zuzuschreiben ist. Es ist das die Energie, die von dem heißen Körper fortgeführt wird dadurch, daß von den auftreffenden Gasmolekülen ein Teil im oder am Draht dissoziiert wird und den Draht als Atome verläßt. Treffen N_1 Moleküle in der Zeiteinheit den Draht, von denen der Bruchteil $\alpha_1 N_1$ absorbiert wird, und diffundieren aus dem Drahtinneren andererseits N_2 Moleküle an seine Oberfläche, von denen der Bruchteil $\alpha_2 N_2$ den Draht verläßt, so ist im Gleichgewicht

$$q_D = W_D \cdot (\alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \qquad (21)$$

wenn W_D die Dissoziationswärme von 1 g Gas ist. Die vier Unbekannten α_1, α_2, N_1, N_2 lassen sich ausdrücken durch andere gaskinetisch bekannte oder der Messung zugängliche Größen. Es muß hier genügen, die Schlußformel anzuschreiben und kurz zu erläutern, nämlich:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{T_2}{T_a}} \cdot \frac{q_D^2 (Bp + C)}{p - q_D (Bp + E)}, \qquad (22)$$

worin $\varkappa$ der Dissoziationsgrad des Gases außerhalb des Drahtes, p der Gasdruck, T_2 bzw. T_a die Temperatur des heißen Körpers bzw. des Gases an der äußeren Grenze der Temperatursprungschicht und endlich B, C, E ziemlich verwickelte Ausdrücke sind, die neben T_a und W_D nur noch Formfaktoren des Körpers und gaskinetische Konstanten enthalten. Aus Vereinfachungen bei niedrigen bzw. hohen Drucken und Temperaturen lassen sich geeignete Kombinationen von Messungen angeben, aus denen die eingehenden noch unbekannten Konstanten bestimmt werden können. Die Sachlage ist also, wie man sieht, nicht eben einfach und die Durchführung der Theorie erfordert mancherlei hypothetische Annahmen und Näherungen. Wieweit die Theorie mit der Erfahrung übereinstimmt, soll in Abschn. 6 besprochen werden. Eine Ergänzung für den Fall eines Gemisches zweier Gase, von denen das eine im Versuchsbereich merklich dissoziiert, das andere nicht (z. B. Wasserstoff und Stickstoff) hat Langmuir am Schluß der Arbeit noch kurz entwickelt.

Eine andere Erweiterung der Gashauttheorie hat kürzlich Rice (24) angegeben. Er findet aus Dimensionsbetrachtungen — leider werden vorläufig nur die Endresultate ohne alle näheren Angaben mitgeteilt — einen allgemeinen Ausdruck für die Dicke der Gashaut, der mit den bisherigen Bezeichnungen lautet

$$D = \alpha \cdot l \cdot (v^2/gl^3)^\beta,$$

worin α und β empirische Konstante sind. Da diese Beziehung ganz allgemein für jedes Medium gelten muß, kann nun also auch in Flüssigkeiten die Abkühlung etwa nach Gl. (16) gefunden werden, für die $\varphi(T_0, T_1)$ bekannt ist; Rice gibt die numerischen Unterlagen für einige Flüssigkeiten durch eine erste lineare Annäherung für den Wärmeleitungskoeffizienten in der Form $K = K_0(1 + a \cdot t)$ und Angabe der Größen K_0 und a.

6. Vergleich mit der Erfahrung.

Das zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial erstreckt sich auch nach Ausscheidung einiger Arbeiten, in denen die Meßtechnik nicht zu der wünschenswerten Schärfe ausgebildet war, über einen so großen Bereich der Versuchsparameter, daß man einen Vergleich mit der Theorie vornehmen kann. Nach den im Vorhergehenden entwickelten Gesichtspunkten ist es dabei vor allem von Interesse, die Abhängigkeit der Abkühlung von der Größe und der Temperatur des heißen Körpers und von der Natur des abkühlenden Mediums innerhalb möglichst weiter Grenzen zu untersuchen. Brauchbare Angaben liegen hier vor für Körpergrößen, die im Verhältnis von etwa $1 : 10^4$ zueinander stehen, für Temperaturen bis hinauf zu 3000° C, für Gasdrucke von etwa 10^{-2} mm Hg bis 100 Atm. und für Zähigkeiten des abkühlenden Mediums, die bis zu der des Glyzerins gehen. Zur weiteren Veranschaulichung der von den Messungen umfaßten Wertebereiche mögen ferner die folgenden Angaben dienen. In den Dimensionsformeln war die Größe $C\nu/K$ aufgetreten, über deren Größenbereich die Tabelle I Aufschluß gibt:

Tabelle I.

Medium	Cv/K
zweiatomige Gase	0,74
CCl_4	8
Anilin	69
Olivenöl	1400
Glyzerin	7640

Eine andere Konstantenkombination, die für Zylinder in Gasen eine Rolle spielte, war $\Theta d^3/\nu^2$, für die einige ausgewählte Werte in der folgenden Tabelle II zusammengestellt sind, aus der die

Tabelle II.

Beobachter	d (cm)	Θ	$\log \Theta d^3/\nu^2$
Ayrton u. Kilgour (1) .	$3{,}1 \cdot 10^{-3}$	200°	— 5,98
Langmuir (13)	$6{,}9 \cdot 10^{-3}$	200°	— 3,02
Langmuir (14)	$5 \cdot 10^{-2}$	200°	— 1,62
Kennelly (11)	$6{,}9 \cdot 10^{-2}$	203°	0,02
Petavel (19)	$1 \cdot 10^{-1}$	900°	2,34
Petavel (19)	5,8	200°	5,62
Petavel (19)	30,48	200°	7,95

große Spannweite dieser Werte hervorgeht. Weniger mannigfach ist die Variation der Körperform. In den meisten Arbeiten sind der bequemen Meßmethodik wegen zylindrische Körper, und zwar vor allem Drähte, untersucht, die elektrisch geheizt und deren Temperatur durch Widerstandsmessungen bestimmt werden kann, nur vereinzelt werden Kugeln benutzt, so z. B. von Dulong u. Petit (9), von Péclet (18), von Provostaye u. Desains (22) und von Compan (5). Die Temperatur wird dann bestimmt entweder dadurch, daß die Körper als Thermometergefäße dienen, oder mit Hilfe von angedrückten Thermoelementen. Die größten Schwierigkeiten liegen in der Ermittlung des Strahlungsanteiles am Wärmeverlust, der entweder durch Rechnung aus dem Strahlungsgesetz oder durch Abkühlung im Vakuum ermittelt wird, worüber die Originalarbeiten nachzulesen sind. Über die älteren Arbeiten hat eingehend Compan (5) berichtet, über neuere und zugleich über Abkühlungsversuche in Flüssigkeiten Davis (8), über die rechnerische Ermittlung des Strahlungsverlustes vor allem Langmuir (13, 14).

Die Diskussion der meisten experimentellen Ergebnisse hat Davis (6—8) bereits so eingehend durchgeführt, daß hier eine auszugsweise Wiedergabe seiner Ergebnisse genügt. Was zunächst die Abkühlung in Gasen anlangt, so gilt für diese wegen der Konstanz von Cv/K die Formel (7) bzw. (8) in der einfachen Gestalt (4) und aus der beobachteten Temperaturabhängigkeit h prop. $\Theta^{1{,}233}$ läßt sich die Funktion F bestimmen zu $[C^2 g l^3 a \Theta/K^2]^{0{,}233}$ und es wird

$$h = \Theta^{1{,}233} \cdot K^{0{,}534} \cdot C^{0{,}466} \cdot a^{0{,}233} \cdot g^{0{,}233} \cdot l^{-0{,}301},$$

worin man mit hinreichender Annäherung an Stelle des Faktors $C^{0{,}466}$ bequemer $p^{0{,}466}$ (p = Gasdruck) setzen kann.

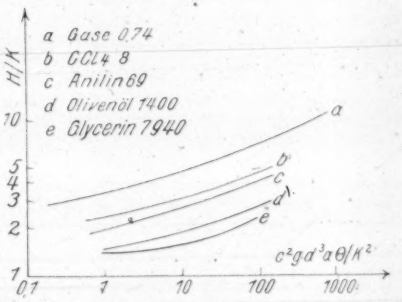


Fig. 3.

Die Diskussion der Ergebnisse von (1), (11), (13), (19) für Zylinder führt dann weitergehend in Übereinstimmung mit Formel (11) zu dem Ergebnis, daß in der Tat H/K auszudrücken ist als Funktion von $\Theta d^3/\nu^2$, wie dies aus der in-

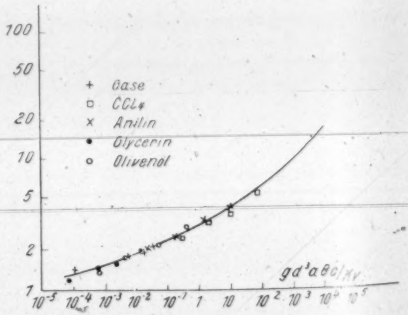


Fig. 4.

struktiven Fig. 2 hervorgeht. Es bezieht sich darin A auf Langmuir, B auf Ayrton u. Kilgour, C, E, F, G auf Petavel und D auf Kennelly. Bemerkenswert ist dabei vor allem, daß in diese Figur auch die von Langmuir gemessenen Werte bis zu $\Theta = 1600°$ zwanglos sich einfügen, die Langmuir selbst aus seiner Gashauttheorie erklärt hatte. Denn es geht daraus hervor, daß die Gültigkeitsbereiche der

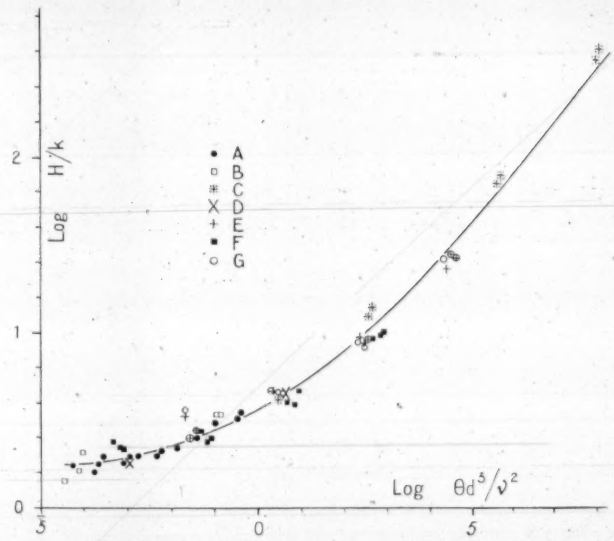


Fig. 2.

erweiterten hydrodynamischen Theorie von Davis und der Gashauttheorie sich noch teilweise überdecken (vgl. S. 286). Wie bereits Davis bemerkt hat, geht aus der Figur ferner hervor, daß für große Werte von $\Theta d^3/\nu^2$ die Funktion F der Formel (11) sich der einfachen Proportionalität mit dem Argument nähert und für kleine Werte von $\Theta d^3/\nu^2$ konstant wird; physikalisch heißt ersteres, daß für große Körper die Abkühlung pro Flächeneinheit unabhängig von der Größe des Körpers ist, letzteres, daß für dünne Drähte die Abkühlung pro Längeneinheit unabhängig vom Durchmesser ist.

In der dritten Arbeit (8) hat Davis dann auch die Ausdehnung der Theorie auf zähe Flüssigkeiten der Diskussion unterzogen und gefunden, daß die Formel (10) gut bestätigt wird. Es geht dies am besten wiederum aus einer graphischen Darstellung hervor, die in Fig. 4 gegeben ist. Ferner zeigte sich, daß in der allgemeinen Formel (9) der Einfluß des Gliedes $f(Cr/K)$ nur verhältnismäßig gering ist. Wie Fig. 3 zeigt, ändert sich H/K nur wenig trotz der außerordentlich großen Änderung des Argumentes jener Funktion, dessen Wert jeweils an den Kurven nochmals angegeben ist. Angenähert lassen sich, wie nebenbei noch bemerkt sei, die Funktionen F und f durch einfache Potenzen der Argumente darstellen.

Die von Davis bearbeiteten Messungen Langmuirs beziehen sich auf Platindrähte von 0,004—0,05 cm Durchmessser, auf Luft von Atmosphärendruck und bei einer Außentemperatur von 300° abs. auf Drahttemperaturen bis hinauf zu 1900° abs. Langmuir konnte sie mit guter Annäherung durch seine einfachen Formeln 16 und 19 darstellen. Wie bereits im allgemeinen Teil dieses Berichtes auseinandergesetzt wurde, ist eine solche Darstellung auch bei höheren Temperaturen in Stickstoff möglich, muß aber bei tieferen Drucken dann vorgenommen werden durch die erweiterte Temperatursprungformel (20). Bei Wasserstoff jedoch macht sich nach Langmuir von etwa 2300° abs. ab die Dissoziation bemerkbar dadurch, daß die beobachteten Wärmeverluste über die berechneten steigen und bei 3300° abs. bereits viermal so groß geworden sind als diese. Zur Illustration möge die folgende Tabelle dienen, in der aus dem von Langmuir mitgeteilten Zahlenmaterial für einige Temperaturen der gesamte Wärmeverlust $q = q_w + q_D$ (abzüglich der Strahlungsverluste) und der Teilverlust q_D durch die Dissoziationseffekte (vgl. S. 290) angegeben sind. Die Werte beziehen sich auf Wasserstoff; in Stickstoff ist innerhalb der Meßfehlergrenzen $q = q_w$, d. h. $q_D = 0$.

p in mm Hg	750		100		10	
Drahttemp. absolut	q	q_D	q	q_D	q	q_D
2000	10,17	0,6	6,63	1,10	2,6	1,0
2500	20,70	6,3	17,8	9,4	10,2	7,8
3000	49,20	29,0	56,7	45,0	33,4	30,0
3300	82,0	58,0	110,0	96,0	60,0	56,0
3500	108,0	81,0	—	—	—	—

Für Kugeln liegen, wie eingangs erwähnt, nur wenige brauchbare Messungen vor, die ebenfalls von Davis bereits bearbeitet worden sind; die gemessenen Werte ordnen sich der Theorie befriedigend ein. Einige der Messungen an Kugeln sind indessen insofern interessant, als sie in so kleinen Gefäßen vorgenommen wurden, daß die unter der Annahme eines unendlich ausgedehnten abkühlenden Mediums angesetzten theoretischen Überlegungen nicht mehr gelten. Man erkennt dies sehr schön z. B. aus den Angaben von Provostaye u. Desains (22), die eine Thermometerkugel von 3 cm Durchmesser in kugeligen Gefäßen von 24 und 15 cm Durchmesser untersuchten. Während in dem größeren Gefäß sich noch in guter Übereinstimmung mit der Theorie Proportionalität der Abkühlung mit $p^{0,45} \cdot \Theta^{1,233}$ ergab, weichen die Ergebnisse für das kleinere Gefäß bereits stark von dieser Dimensionsformel ab. Compan (5) hat dann den Einfluß der Größe des Umhüllungsgefäßes genauer untersucht, worüber einige Bemerkungen auch bei Porter (20) zu finden sind. Vor allem weisen diese Versuche auf die Grenzen der bisherigen Theorie hin und mahnen zur Vorsicht in der Anwendung ihrer Folgerungen, insbesondere auch deshalb, weil die Theorie im allgemeinen keinen quantitativen Inhalt für derartige Randstörungen gibt. In diesem Zusammenhang sei noch auf die absichtliche Unterbindung der Konvektionsströme durch geeignete Prallflächen, z. B. bei Weber (27) hingewiesen.

Zum Schluß wird es nützlich sein, über den Absolutwert der Abkühlung noch einige Angaben zu machen. Für zylindrische Körper geben darüber im ganzen Bereich die Fig. 2 u. 4 bereits Aufschluß durch die Angaben, daß H die Abkühlung in cal. $sec^{-1} \cdot cm^{-1}$ $grad^{-1}$ ist, wenn die Temperaturen in Celsiusgraden und die Konstanten in C.G.S.-Einheiten gemessen werden. Als Beispiel sei etwa in Fig. 4 der zu $\ln \Theta d^3/\nu^2 = \overline{4},32$ und $\ln H/K = 0,25$ gehörende Meßpunkt betrachtet, und zwar für den von Langmuir untersuchten Fall eines Drahtes von 0,004 cm Durchmesser in Luft von Atmosphärendruck bei einer Drahttemperatur von 215° C und einer Außentemperatur von 15° C. Dann ist $K = 0,72 \cdot 10^{-4}$ zu setzen entsprechend einer Mitteltemperatur des Gases von 115° C und man erhält $H = 1,3 \cdot 10^{-4}$ pro 1° Temperaturdifferenz, d. h. für den tatsächlichen Wärmeverlust pro Zentimeter Drahtlänge

$$2,6 \cdot 10^{-2} \text{ cal/sec} = 0,11 \text{ Watt}.$$

Der Strahlungsverlust ist gegen den Konvektionsverlust schon bei Temperaturen von einigen hundert Grad nicht mehr zu vernachlässigen. Sorgfältig überprüftes Zahlenmaterial ist in den Arbeiten von Langmuir zu finden.

Zusammenfassend ergibt sich nun wohl das folgende Bild von dem derzeitigen Stand der Kenntnis über die natürliche Abkühlung: Die Abkühlung eines heißen Körpers in einer Flüssigkeit oder einem Gas erfolgt dadurch, daß Wärme von dem abkühlenden Medium nach den Ansätzen der klassischen Wärmeleitungstheorie abgeführt wird, wobei jedoch das Medium infolge der Temperaturdifferenzen und des dadurch bedingten Auftriebs nicht in Ruhe ist, sondern nach den Gesetzen der Hydrodynamik in Konvektionsströmen den heißen Körper umspült. Für ein praktisch unbegrenztes Medium lassen sich die Differentialgleichungen, die diesen komplizierten Vorgang beschreiben, zwar nicht in Strenge lösen, sie lassen sich aber zur Ableitung von sehr brauchbaren Modellregeln benutzen und enthüllen so den Mechanismus, der allgemeinen Dimensionalbetrachtungen zur Ableitung derselben Modellregeln zugrunde liegt. In ersten Annäherungen kann man dabei einerseits in einem gewissen Bereich mit Boussinesq annehmen, daß die innere Reibung des Mediums zu vernachlässigen ist und daß seine physikalischen Eigenschaften von der Temperatur nicht abhängen, anderseits in einem andern Bereich nach Langmuir die Sachlage so darstellen, als ob in der nächsten Umgebung des heißen Körpers das Medium in Ruhe ist und nur die Wärmeleitung eine Rolle spielt. In zweiter Annäherung hat man mit Davis die innere Reibung und die Temperaturabhängigkeit der physikalischen Eigenschaften des Mediums zu berücksichtigen und kann damit den Geltungsbereich der Ansätze von Boussinesq wesentlich, sogar bis in den Bereich der Langmuirschen Näherung hinein, erweitern. Prinzipiell neue und über diese Annahmen hinausgehende Erweiterungen werden jedoch in Gasen notwendig bei hohen Temperaturen und tiefen Drucken. Sie sind nach Langmuir bedingt durch die Ausbildung eines Temperatursprunges an der Oberfläche des heißen Körpers und durch die Wärmeeffekte einer partiellen Dissoziation des Gases. Noch sehr wenig bekannt ist über die Abkühlung in einem nicht unbegrenzten Medium, wo vorläufig nur im Bereich

der Langmuirschen Näherung die Sachlage zu übersehen ist.

Literaturverzeichnis.

1) Ayrton u. Kilgour, Phil. Trans. **183**, 371, 1892.
2) Boussinesq, Théor. anal. de la chaleur, Bd. II.
3) — C. R. **132**, 1382, 1901.
4) Cardani, Nuov. Cim. **27**, 245; **28**, 10, 1890; **30**, 33, 1891.
5) Compan, Ann. Chim. Phys. (7) **26**, 488, 1902.
6) Davis, Phil. Mag. **40**, 692, 1920.
7) — Phil. Mag. **43**, 329, 1922.
8) — Phil. Mag. **44**, 920, 1922.
9) Dulong u. Petit, Ann. chim. phys. **7**, 225, 337, 1818.
10) Fourier, Mém. Acad. Paris **12**, 507, 1820.
11) Kennelly, Trans. Am. Inst. Electr. Eng. **28**, 363, 1909.
12) Langmuir, Diss. Gött. 1906.
13) — Phys. Rev. **34**, 401, 1912.
14) Langmuir, Zeitschr. f. Elektrochem. **20**, 498, 1914; **23**, 217, 1917.
15) Lorenz, Ann. Phys. 13, 582, 1881.
16) Nelson, Phys. Rev. **23**, 94, 1924.
17) Oberbeck, Ann. Phys. **7**, 291, 1879.
18) Peclét, Traité de chaleur 1860.
19) Petavel, Proc. Manch. Ass. Eng. 1915, 116; Phil. Trans. **183**, 371, 1892.
20) Porter, Phil. Mag. **39**, 267, 1895.
21) Pramanik, Proc. Indian Ass. Cult. Sc. **7**, 115, 1922; Ray. ebd. **6**, 95, 1921.
22) Provostaye u. Desains, Ann. chim. phys. **16**, 337, 1848.
23) Rayleigh, Nat. **45**, 66, 1915.
24) Rice, Phys. Rev. **21**, 474, 1923; **23**, 306, 1924.
25) Royds, Heat Transmission. Vol. I. (Constable 1921).
26) Wagner, Diss. Zürich 1902.
27) Weber, Ann. Phys. **54**, 325, 437, 1917.

Greifswald, Februar 1925.

(Eingegangen 20. Februar 1925.)

BESPRECHUNGEN.

C. G. S. Sandberg, Isostasie und die ursächliche Einheit von Gebirgsbildung und Vulkanismus. (Geodynamische Probleme I.) gr. 8°. 69 S. mit 17 Textabbildungen und 5 Tafeln. Berlin, Gebr. Borntraeger. 1924. Geh. M. 50.—

Die Einführung physikalischer Denkweise bei der Behandlung geodynamischer Probleme ist bei der fortschreitenden Entwicklung unserer Kenntnis vom Aufbau und den Bewegungsvorgängen in unserer Erde durchaus angebracht und auch mit Erfolg versucht worden.

Das vorliegende Heft liefert einen Beitrag in dieser Richtung.

Abschnitt I und II Abkühlungsvorgänge.

Die lokal verschiedenen Abkühlungsvorgänge bei der Verfestigung der Erdoberfläche veranlassen die Ausbildung von Niveauunterschieden in der ursprünglichen Kruste, die Urgeoanti- und -synklinalen (*GA* und *GS*-Kontinent und Ozean). Bei fortschreitender Abkühlung und Kondensation des Wasserdampfes, setzt der Kreislauf des Wassers ein. Die schon vorhandenen Niveauunterschiede ermöglichen Denudation und Sedimentation. Die vertikale Gliederung ist jetzt folgende: Unter einer festen „Schale" der Erde wird eine nachgiebige Magmazone angenommen. Die „Schale" selbst zerfällt in „Mantel" und „Kruste". Der Mantel ist durch Sedimentation gebildet, nicht zusammenhängend, oben faltbar unten plastisch. Er liegt der Kruste auf. Die Kruste ist erstarrte Magma, oben spröde, unten plastisch. Jede Änderung der Dicke der einzelnen Schalenteile stört das Gleichgewicht, aber nicht nur im Schwerefeld, sondern auch im Wärmehaushalte. Die Dicke der Kruste wird nämlich als eine Funktion des Wärmestromes angesehen. Dieser wieder als Funktion der durch Denudation und Sedimentation veränderlichen Schalendicke. In der Geoantiklinalen bewirkt Denudation Abnahme der Manteldicke, dadurch lokal gesteigerten Wärmestrom, Abkühlung und Verfestigung des angrenzenden Magmas, also Verdickung der Kruste bis das Gleichgewicht im Wärmehaushalt wieder hergestellt ist. Neben gravitativer Isostasie wird in diesem Zusammenhang eine thermische Isostasie wirksam. Am Meeresboden ist der Wärmeabfluß durch die feste Erdschale größer als im gleichen Niveau der *GA*. Die Dicke der Kruste unter dem Meere ist danach größer als unter der *GA*.

Abschnitt III. Gebirgsbildung und Vulkanismus. Die sinkenden Sedimente bewahren trotz der hohen Drucke ihr Porenvolumen und ihren Wassergehalt selbst bis zu den Tiefen, in denen sie schmelzen. Der dort bei rund 1000° entstehende Dampfdruck im Wasser soll den Gesteinsdruck dort von 6000 Atmosphären (muß wohl um 2—3000 Atmosphären höher liegen) übertreffen, und in der *GS* Aufwölbung und Explosionen erzeugen, wodurch die geographische Nachbarschaft zwischen Gebirgsbildung und Vulkan erklärlich wird.

Nicht recht verständlich ist, wie der Druck des in Poren eingeschlossenen Wassers bei 1000° (wenn das Gestein nicht hydratisiert wird, was doch anzunehmen wäre), solche explosionsartige Wirkung haben könnte. Infolge seiner thermischen Ausdehnung als Wasser könnten wohl im Gestein Risse entstehen, aber keine Explosion oder Aufwölbung. Die dazu nötige Arbeitsleistung kann bei der thermischen Ausdehnung wegen der geringen thermischen Volumänderung nicht geleistet werden. Die auflagernden Massen erhalten keine genügende Beschleunigung. Diese würde erst beim Übergang in Dampfform auftreten und dazu sind die überlagernden Drucke im Verhältnis zur Temperatur — falls man von der geothermischen Tiefenstufe ausgeht — überall im Erdinnern zu groß.

Als Anhang wird über einige Experimente berichtet, die die Faltungsvorgänge der Erdschale recht schön verdeutlichen. Ein Modell der Erdschale wurde hergestellt aus einer Asphaltschicht mit Tonbedeckung, die auf einer schweren konzentrierten wässerigen Lösung von Chlorkalzium ruhte. Durch Druckänderung wurden Aufwölbungen und Einsenkungen erzeugt, wodurch die Oberflächenschicht zur Faltung gebracht wurde.

Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis ist angehängt. Die Arbeiten von W. Bowie (Coast and geodetic Survey U. S. A. z. B. Am. Journ. of Sc. 1921) aus den letzten Jahren, die gleichfalls das Problem vertikaler Bewegungen behandeln,

sind leider nicht berücksichtigt worden. Die Theorie ist nur qualitativ entwickelt; quantitativ ist sie nicht nachgeprüft. G. Angenheister.

A. Berliner, Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung. III. Auflage. 8°. 645 S. Berlin, Julius Springer. 1924.

Nach längerer Pause erscheint das bekannte Lehrbuch von A. Berliner neu belebt in III. Auflage. Es ist nicht nur neu belebt, es ist auch ein neues Buch geworden, das von der ersten bis zur letzten Seite überlegt und aufs Laufende gebracht ist, und an dem Prof. Geiger und Prof. Henning beratend und ausgestaltend mitgewirkt haben. Nicht zu vergessen ist auch Herr Sternstein, der eine sehr originelle Zeittabelle beigesteuert hat, in der die Lebenszeiten der hervorragenden Physiker graphisch sozusagen im funktionalen Zusammenhang dargestellt sind; eine Methode, die zu allerlei nachdenklichen Betrachtungen anregt.

Das Buch ist elementar gedacht und ist auch wirklich elementar; dies letztere im Sinne eines hohen Lobes verstanden. Mehr als je hat heutzutage ein Lehrbuch Bedeutung für den Studierenden. Die Zahl der Vorlesungen, die den Anfänger in die Experimentalphysik einführen sollen, ist dieselbe geblieben, oder man versucht sie sogar, von der Spezialistenseite her, eher noch einzuschränken. Andererseits erfordern die Experimente, auf die gerade zum Zweck der Homogenisierung der Hörerschaft das größte Gewicht gelegt werden muß und auf denen die ideelle Einheit des Anfängerkollegs beruht, eine immer größere Zeit. So ist es vollkommen unmöglich, neben den praktischen Anforderungen des Einleitungskollegs einen erschöpfenden und systematisch aufbauenden Vortrag zu bieten, der in architektonischer Weise Stein auf Stein häuft. Es geht kaum anders, als daß man dem Anfänger ein Lehrbuch in die Hand gibt, in dem er mit- und nachliest, und das ihm zugleich Anlaß gibt, über das Gelesene kritisch nachzudenken. Hier ist das Buch von Berliner ein ausgezeichneter und verläßlicher Führer. Eine zweckmäßige Unterteilung ermöglicht die Konsumption in bekömmlichen Dosen, und kleingedruckte Zusatzabschnitte gewähren auch dem Weiterstrebenden Ein- und Ausblicke. Einem Lehrbuch wie diesem gegenüber ist der Berichterstatter nicht in bequemer Lage. Man müßte ein Jahr Zeit haben, damit das Buch im Zusammenhang mit der Vorlesung Paragraph um Paragraph gelesen und probiert werden könnte. Allein auch eine schnelle Lektüre wird jedem Kenner die Zuversicht geben, daß hier etwas Ausgezeichnetes geschaffen worden ist, das von den Anfängen weiterführt bis zu den modernen Problemen. Im einzelnen bemerkt man manches Originelle und Interessante. In der Mechanik ist die geradlinige Bewegung vorab behandelt und zur Grundlage des übrigen gemacht. Dann sind z. B. Ebbe und Flut, Drehwage, Relativität, elastische Hysteresis, Hydrodynamik und Aerodynamik ausführlicher behandelt, als es in andern kurzen Lehrbüchern geschieht. Hin und wieder belebt ein Zitat aus Originalschriften den Fluß der Darstellung, und man spürt gern den Kenner und Liebhaber Goethes, auch im reinen Äther der Physik. Daß die Darstellung der geometrischen Optik besonders gut durchdacht ist, wird man nicht anders erwarten, und auch bei der Behandlung der Hertzschen Wellen glaubt der Leser eine etwas erhöhte Temperatur des Verfassers zu bemerken. Druckfehler oder Versehen sind auf ein Minimum reduziert. Aufgefallen ist mir nur die unrichtige Stellung des Prismas im § 403. Alles in allem: ein ausgezeichnetes Buch, das aufs wärmste empfohlen werden muß und bis zu dessen nächster Auflage ganz gewiß nicht wieder 10 Jahre vergehen werden. Konen.

Wo. Ostwald, Licht und Farbe in Kolloiden. Gr. 8°. XIV u. 556 S., mit 127 Textfiguren, 79 Tabellen, 17 Tafeln (darunter 5 farbigen). Dresden und Leipzig, Th. Steinkopff. 1924. M. 32.—, geb. M. 35.—.

Als erster Band des Handbuches der Kolloidwissenschaft in Einzeldarstellungen erscheint ein umfangreicher Bericht von Wo. Ostwald über die Optik von kolloiden Systemen. Zur Kennzeichnung des Buches sei noch der Untertitel angeführt: Eine phänomenologische Monographie. Erster Teil: Opische Heterogenität, Polarisation, Drehung, Allgemeine Absorption, Heterogenitätsfarben. (Die Ergebnisse bis 1914). Die Darstellung sucht das mannigfaltige und noch recht ungleichmäßige experimentelle Material einer wesentlich qualitativ begründenden, doch prinzipiell gedachten Ordnung zu unterziehen. Daß eine solche Unternehmung zeitgemäß ist, lehrt schon eine oberflächliche Durchsicht des sehr ausführlichen Inhaltsverzeichnisses, woraus klar wird, in wie verwickelter Weise verschiedene Grundphänomene sich hier zu den Erscheinungen, wie sie sich der Beobachtung darbieten, überlagern. Der physikalische Leser wird trotz aller darauf bezüglichen Äußerungen des Verf. oft bedauern, daß nur an wenigen Stellen der Diskussion quantitative Gesichtspunkte in strafferer mathematischer Form zur Geltung kommen. Doch beruht der Wert des Buches überhaupt viel mehr in der Sammlung von Tatsachen und dem Versuch einer ordnenden Systematik, so daß jeder optisch Interessierte über die im Untertitel genannten Gebiete bis zum Stande von 1914 sich mit Nutzen wird orientieren können. Die Bildausstattung des Bandes ist jedes Lobes wert. L. Ebert.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Köln Dr. Joseph Loevenich für Chemie, an der Universität Berlin Dr. Hermann Mark (vom Kaiser-Wilhelm-Institut für Faserstoffchemie) für Chemie, an der Universität Leipzig Dr. Conrad Weygand für angewandte Chemie.

Ernannt: Der Direktor des physikalischen Instituts an der Universität La Plata Professor Dr. Richard Gans zum ord. Professor der Physik an der Universität Königsberg, der Professor der Physik an der Chalmersschen Technischen Hochschule in Göteborg Dr. John Koch zum ord. Professor der Physik an der Universität Lund, Privatdozent Dr. H. Mark zum Leiter der physikalisch-chemischen Abteilung des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Faserstoffchemie in Berlin-Dahlem, Colin Campbell zum Dozenten für Chemie an der Universität Manchester.

Gestorben: Der frühere Leiter des Werkes für Radiumgewinnung in St. Joachimsthal Ministerialrat a. D. Dr. Karl Ulrich, der emer. Direktor des Government-Laboratoriums in London Sir Edward Thorpe (Herausgeber des Dictionary in Applied Chemistry), der frühere ord. Professor der Physik an der Universität Oslo (Christiania) Dr. Oscar Emil Schiötz, Professor W. F. Hillebrand, leitender Chemiker im Bureau of Standards in Washington.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

MAX KOHL A.G.

Physikalische Apparate

Demonstrations - Rundfunk - Empfangs - Apparate
Oelluftpumpen und Gebläse
Längen- und Kreisteilmaschinen
Komparatoren ✳ Funkeninduktoren
Megadiaskope ✳ Verdunkelungen
Experimentier-Schalttafeln
Laboratorienmöbel

Max Kohl A.-G. Chemnitz 4

Gründungsjahr 1876

Der Kauf von physikalischen Apparaten ist Vertrauenssache!

Spindler & Hoyer G. m. b. H.

Mechanische und optische Werkstätten

Göttingen 3.

Apparate für luftelektrische
und radioaktive Messungen
Erdbebenregistrierapparate
Normalbatterien
Kondensatoren
Mikrowage
Quarzfadenelektroskop
nach Wiechert
(siehe Abbildung).

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente
eigener Konstruktion,
Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.